MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

56. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 6. OKTOBER 1952)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27, **R. Nevanlinna,** Zürich/Schweiz, Hadlaubstr. 45
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6, **E. Schmidt,** Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut.

Geschäftsführender Herausgeber:

H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebs-Vertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C.2.

56. Band **Inhalt** 3. Heft

Bose, S. K., Lucknow (India), Pitamber Ashram, 113 Clay Square: Some properties of the maximum function of a meromorphic function . . . . . Seite 223
Heegner, K., Berlin-Steglitz, Elisenstr. 7: Diophantische Analysis und Modulfunktionen 227
Shah, S. M., Aligarh (India), Math. Dept., Muslim University: A Note on Entire Funktions of Perfectly Regular Growth. 254
Sprague, R., Berlin-Lankwitz, Siemensstr. 53a: Über additive Zerlegungen in lauter verschiedene Glieder einer Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe 258
Müller, C., Bonn, Math. Sem. d. Univ.: Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen 261
Rembs, E., Berlin-Friedenau, Begasstr. 7: Zur Verbiegung von Flächen im Großen. 271
Prasad, B. N., and U. N. Singh, Allahabad (India), Math. Dept., University: On the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series . . 280
Carleson, L., Uppsala (Schweden), Universitets Mat. Inst.: On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals 289
Zimmermann, W., Göttingen, Max-Planck-Inst. f. Physik: Stetige Abbildungen topologischer Räume auf endliche abstrakte Komplexe 296
Wever, F., Mainz, Math. Inst. d. Universität: Über reduzierte freie Liesche Ringe 312
Gaier, D., Stuttgart, Math. Inst. A. d. Techn. Hochsch.: Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze 326

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 223—226 (1952).

Some properties of the maximum function of a meromorphic function.

By

S. K. Bose in Lucknow (India).

1. In my previous paper [1], I have defined the maximum and minimum functions of a meromorphic function as follows:

If $f(z)=f_1(z)/P(z)$ is a meromorphic function with poles $b_1, b_2, \ldots$ and zeros $a_1, a_2, a_3, \ldots$, $P(z)$ denoting the canonical product with zeros $b_1, b_2, \ldots$, *exclude* from the plane the circles C_i and C_i' given by $|z-b_i|=\varepsilon_i$ and $|z-a_i|=\varepsilon_i'$, and let $\varepsilon_i=|b_i|^{-h}$ and $\varepsilon_i'=|a_i|^{-h'}$ where $h>\varrho_1$ and $h'>\varrho_2$, ϱ_1 and ϱ_2 being the exponent of convergence of the sequences $\{b_i\}$ and $\{a_i\}$ respectively. In the region D exterior to the circles C_i and interior and on the circle $|z|=r$, we define the *maximum function* of $f(z)$ as

$$\max_{|z|\leqq r}|f(z)|\leqq\frac{M_1(r)}{m_2(r)}=S(r),$$

where $M_1(r)=\max_{|z|=r}|f_1(z)|$, $m_2(r)$ is the minimum modulus of $P(z)$ for $|z|=r$ and z is a point in D.

The minimum function of $f(z)$ in the region exterior to the circles C_i' and interior and on the circle $|z|=r$ is defined as

$$\min_{|z|\leqq r}|f(z)|\geqq\frac{m_1(r)}{M_2(r)}=s(r),$$

where $m_1(r)$ is the minimum modulus of $f_1(z)$ for $|z|=r$, $M_2(r)=\max_{|z|=r}|P(z)|$ and z is a point in D'.

Further, I have shown that $\log^* S(r)$ is a convex function of $\log r$ where $\log S(r)$ denotes the maximum function of

(i) $\log|f(z)|$ when $f_1(z)$ is of order greater than or equal to that of $P(z)$;

(ii) $\log\frac{1}{|f(z)|}$ when $P(z)$ is of order greater than or equal to that of $f_1(z)$;

for $r>r_0$, r_0 depending on C_i for (i) and C_i' for (ii).

The object of this paper is to give some more definitions and to establish some properties of the maximum function. In Theorem IV, I have obtained a lower bound for $S'(r)$ in terms of $S(r)$ and r, where $S'(r)$ is the maximum function of the derivative of $f(z)$.

In this paper the point z, wherever it occurs, is taken in *the region* D or D' according as the circles C_i or C_i' have been excluded as defined above.

2. We have defined the order of a meromorphic function $f(z)$ to be ϱ,

$$\varrho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log^* S(r)}{\log r}$$

where $S(r)$ denotes the maximum function of $f(z)$; so it is natural to call

$$\lambda = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log \log^* S(r)}{\log r}$$

the *lower order*.

If $\lambda = \varrho < \infty$, then we may call, as in the case of an integral function, $f(z)$ to be of *regular growth and of finite order*.

3. Theorem I. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order $\varrho\,(1<\varrho<\infty)$, then*

(i) $$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}$$

provided $f_1(z)$ is also of order ϱ;

(ii) $$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho}$$

provided $P(z)$ is also of order ϱ.

Proof: Let $S(r)$ denote the maximum function of $f(z)$ for $|z| = r$. Then

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r) - \log m_2(r)}{r^\varrho}$$

(i)
$$= \varlimsup_{r\to\infty} \left[\frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}\left\{1 - \frac{\log m_2(r)}{\log M_1(r)}\right\}\right]$$

$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}.$$

(ii) In this case

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r) - \log m_1(r)}{r^\varrho}$$

$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho}$$

and the theorem is proved.

We should note here that the different cases that will arise in the case of integral function, which is already known, regarding $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho}$ will also hold, in general, in the case of meromorphic function.

4. Theorem II. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order $\varrho\,(1<\varrho_1<\varrho<\infty)$, then*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = 0$$

where $f_1(z)$ is of order ϱ_1.

Proof: We have

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log S(r)}{r^\varrho} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r) - \log m_2(r)}{r^\varrho}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{r^\varrho}$$

$$= 0$$

for

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)}{r^{\varrho}}=0, \quad \text{where } \varrho_1<\varrho.$$

5. Definitions. Here we give some more definitions:
If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ, and
(i) If

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{r^{\varrho}}=B$$

where B is a positive number, then $f(z)$ will be called a *meromorphic function of perfectly regular growth.*
(ii) If

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{r^{\varrho}}\geq B$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^* S(r)}{r^{\varrho}}\leq D_1,$$

where D_1 is a positive number greater than B, then $f(z)$ will be called a *meromorphic function of very regular growth.*

6. Theorem III. (i) *If $f(z)$ is a meromorphic function of non-integral order ϱ $(1<\varrho<\infty)$, and $f_1(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,0)}<\infty;$$

(ii) *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ and $P(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

Proof:
(i) We have

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,0)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)-\log m_2(r)}{n(r,0)}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\log M_1(r)}{n(r,0)}\left\{1-\frac{\log m_2(r)}{\log M_1(r)}\right\}\right]$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)}{n(r,0)}.$$

Now (Valiron [2], p. 59)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_1(r)}{n(r,0)}<\infty,$$

hence

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,0)}<\infty.$$

(ii) We have

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S(r)}{n(r,\infty)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_2(r)-\log m_1(r)}{n(r,\infty)}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_2(r)}{n(r,\infty)}.$$

Applying the result (VALIRON [2], p. 56)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M_2(r)}{n(r,\infty)}<\infty,$$

whence

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log^* S(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

7. Theorem IV. *If $f(z)$ is a meromorphic function, $S(r)$ and $S'(r)$ are the maximum function of $f(z)$ and its derivative respectively, for $|z|=r$, then*

$$S'(r)\geq\frac{S(r)\log^* S(r)}{r\log r}\quad \text{for } r>r_0 \tag{1}$$

where r_0 is a number depending on the function $f(z)$, and for those functions only for which it is possible to find a value w of z such that

$$S(r)=|f(w)|.$$

Proof: I have shown [1] that $\log^* S(r)$ is a convex function of $\log r$, therefore

$$g(r)=\frac{\log^* S(r)}{\log r} \tag{2}$$

is increasing function of r for $r>r_0$. Let w be such that $|w|=r$ and $|f(w)|=S(r)$. Then

$$\begin{aligned}
S'(r)&\geq|f'(w)|\\
&=\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{f(w)-f(w-w\,\varepsilon)}{w\,\varepsilon}\right|\\
&\geq\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{S(r)-S(r-r\,\varepsilon)}{r\,\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{r^{g(r)}-(r-r\,\varepsilon)^{g(r-r\varepsilon)}}{r\,\varepsilon}\\
&\geq\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{r^{g(r)}-(r-r\,\varepsilon)^{g(r)}}{r\,\varepsilon}\\
&=g(r)\,r^{g(r)-1}\\
&=\frac{\log^* S(r)}{\log r}\cdot\frac{S(r)}{r}
\end{aligned}$$

which completes the proof of the theorem.

References.

[1] BOSE, S. K.
Maximum and Minimum Function of a Meromorphic Function. Bull. Calcutta Math. Soc. **1952**.

[2] VALIRON, G.
Theory of Integral Functions. 1923.

(Eingegangen am 15. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 227—253 (1952).

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Die Theorie der algebraischen Funktionen hat ihren Ursprung in der arithmetischen Fragestellung. Die Aufgabe, rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Katheten und Hypotenuse rationale Maßzahlen haben und deren Inhalt eine Quadratzahl ist, oder zu zeigen, daß es solche Dreiecke nicht gibt, führt FERMAT auf die Methode des unendlichen Abstiegs. Aus der Rationalisierung der pythagoreischen Gleichung

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \tag{1}$$

ergibt sich die diophantische Gleichung

$$ab(a^2 - b^2) = \text{Quadrat}. \tag{2}$$

Die Nullstellen des Verzweigungspolynoms dieses elliptischen Gebildes liegen harmonisch und die zugehörige elliptische Funktion ist der sinus lemniscaticus. Durch die Korrespondenz (1, 2)

$$a = a_*^2, \qquad b = b_*^2 \tag{3}$$

ist (2) arithmetisch verknüpft mit dem elliptischen Gebilde

$$a_*^4 - b_*^4 = \text{Quadrat} \tag{4}$$

bei dem die Nullstellen des Verzweigungspolynoms gleichfalls harmonisch liegen. Die Unmöglichkeit von (4) kann dahin formuliert werden, daß die mittlere Proportionale aus einer Kathete und der Hypotenuse eines „pythagoreischen Dreiecks" nicht rational sein kann. In diesem Satze ist zugleich die Aussage FERMATs über die bekannte Potenzengleichung für den Fall des Exponenten vier enthalten.

Die Aufgabe über das pythagoreische Dreieck läßt sich dahin verallgemeinern, daß Dreiecke gesucht werden, deren Inhalt das n-fache einer Quadratzahl ist, wobei n eine ganze rationale positive Zahl bedeutet, die keinen Teiler zweifach enthält. Nach der erwähnten Methode ergibt sich, daß Dreiecke nicht existieren, wenn n eine Primzahl $p \equiv 3 \pmod 8$ oder das Doppelte einer Primzahl $p \equiv 5 \pmod 8$ ist[1]). Andrerseits ist ersichtlich, daß es Werte für n gibt, die eine Lösung haben. Aus dem Harpedonapten-Dreieck mit der Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ ergibt sich der Wert

[1]) Man vgl. etwa T. NAGELL, Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre, Acta Math. **52** (1929) 93—126. Die elementar-arithmetischen Beweise werden im folgenden stets übergangen.

$n = 6$ oder, wenn man die entsprechende Verallgemeinerung von (4) heranzieht, der kleinstmögliche Wert $n = 5$. Die Transformation

$$\begin{array}{l} a \;:\; b \;:\; a - b : a + b = \\ n c_1^2 : c_2^2 : \quad c_3^2 \quad : c_4^2 \end{array} \tag{5}$$

führt zunächst auf ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} n c_1^2 - c_2^2 = c_3^2 & c_4^2 - c_3^2 = 2 c_2^2 \\ n c_1^2 + c_2^2 = c_4^2 & c_4^2 + c_3^2 = 2 n c_1^2, \end{array} \tag{6}$$

bei welchem jede einzelne Gleichung in rationalen Zahlen auflösbar ist, wenn n eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ ist. Ich behaupte nunmehr, daß für jedes $p \equiv 5 \pmod 8$ die Gleichungen simultan erfüllt werden können. Aus einer Tabelle, die ich vor 30 Jahren angefertigt habe, entnehme ich für die niedersten Werte von n die in (5) einzusetzenden Zahlenwerte

	n	c_1	c_2	c_3	c_4
	5	1,	2,	1,	3
(7)	13	5,	6,	17,	19
	29	13,	70,	1,	99
	37	145,	42,	881,	883.

Der Nachweis läßt sich nur durch die elliptische Modulfunktion führen. Es gibt noch andere Gleichungssysteme von dieser Eigenschaft; für $p \equiv 3 \pmod 8$, $n = 2p$, oder $p \equiv -1 \pmod 8$, $n = p,\ 2p$.

Sobald an einem elliptischen Gebilde mit rationalen Zahlenkoeffizienten eine Lösung in rationalen Zahlen bekannt ist, lassen sich im allgemeinen unendlich viele Lösungen vermöge einer FERMATschen Kette ermitteln. Auf diese algebraischen Abhängigkeiten, in denen jede der beiden Variablen nur bis zum zweiten Grade ansteigt, gründet EULER, angeregt durch Arbeiten FAGNANOs über die Teilung des Lemniskatenumfanges, die Herleitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung. Bezüglich des Gleichungssystems (6) läßt sich die Aussage über die rationalen Lösungen dahin verschärfen, daß bei $n = p \equiv 5 \pmod 8$ durch eine einzige FERMATsche Kette alle rationalen Lösungen erhalten werden. Eine erste Untersuchung nach dieser Richtung verdankt man LAGRANGE[2]). Das von ihm behandelte Beispiel rührt ebenfalls von FERMAT: Alle pythagoreischen Dreiecke zu finden, bei denen die Hypotenuse und die Summe der Katheten ein Quadrat ist. Die Aufgabe führt gleichfalls auf ein elliptisches Gebilde vom harmonischen Fall

$$2u^4 - 1 = \text{Quadrat} \tag{8}$$

[2]) Oeuvres, t. IV, p. 377.

mit der Grundlösung $u = 1$, das uns bald wieder begegnen wird. LAGRANGE löst die Gleichung vermittels der symmetrischen FERMATschen Kette

$$u_1^2 u_2^2 - u_1^2 - u_2^2 - 6u_1 u_2 + 8 = 0 \tag{9}$$

vollständig auf[3]). Die Ausrechnung von (9) nach einer der Variabeln ergibt eine Gleichung

$$u^4 + 8 = \text{Quadrat}, \tag{10}$$

die mit (8) durch quadratische Transformation verknüpft ist.

Die eingangs vorgelegte Aufgabe enthält auch zwei- und mehrbasige Gleichungen, bei denen man nicht mehr mit einer einzelnen FERMATschen Kette auskommt. Bereits bei der Einschränkung der ganzen Zahl n auf eine Primzahl oder das Doppelte einer Primzahl treten bei $p \equiv 1 \pmod 8$ zweibasige Gleichungen auf $(n = 34, 41)$, zu deren Behandlung die Heranziehung einer PICARDschen Modulfunktion erforderlich wird. Um die Ausweitung der Untersuchung auf mehrere Veränderliche[4]) zu vermeiden, gebe ich der vorliegenden Arbeit eine andere Wendung. Vorerst hierzu folgendes:

Die grundlegende Idee besteht darin, auf transformierbare automorphe Funktionen[5]) die von F. KLEIN an der elliptischen Modulfunktion entwickelte Stufentheorie in Anwendung zu bringen. Zu jeder vorgegebenen Stufe gibt es bestimmte Resolventen, auf die sich die Koinzidenzen der unendlich vielen Transformationskorrespondenzen vollständig und eindeutig verteilen. Diese Einsicht ergab sich bei algebraischen Untersuchungen im Gebiete zweier Veränderlicher, auf die ich durch die Beschäftigung mit den reduzierbaren ABELschen Integralen geführt wurde[6]), und legte mir den Gedanken nahe, diophantische Gleichungen durch Modulfunktionen zu lösen.

Für die elliptische Modulfunktion hat H. WEBER im Zusammenhang mit der Aufgabe, die Klasseninvarianten zu berechnen, derartige arithmetische Resolventen im dritten Band seiner Algebra betrachtet. Der Gesichtspunkt ist daselbst, möglichst einfache numerische Resultate zu erhalten. Diese Moduln eignen sich daher auch zur Einführung in das zu betretende Gebiet, und es werden sich für die lemniskatischen Fälle der elliptischen Gebilde (harmonischer und äquianharmonischer Fall), die sich naturgemäß wiederum zuerst einstellen, erste Einsichten ergeben.

[3]) loc. cit., indem $n : m = u_1$ und $s : t = u_2$ zu setzen ist.

[4]) Meine Forschungstätigkeit in dieser Richtung wurde in den Jahren 1947 bis 1950 von der Berliner Akademie unterstützt. Die vorliegende Arbeit knüpft an Untersuchungen älteren Datums an.

[5]) K. HEEGNER, Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen, Math. Z. **43** (1938) 161—204 u. 321—352; **44** (1939) 555—567.

[6]) Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt, Journ. f. reine u. angew. Math. **168** (1932), 91—105. Ferner: Diophantische Untersuchungen über reduzierbare ABELsche Integrale, Math. Z. **31** (1930), 457—480 u. 481—497.

1. Die Resultate H. Webers.

In den Untersuchungen WEBERs über die Klasseninvarianten nimmt der SCHLAEFLIsche Modul eine bevorzugte Stellung ein.

$$\sigma(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + q^{2\nu-1}), \quad q = e^{i\pi\omega}. \tag{11}$$

Die Beziehung zum LEGENDREschen Modul $\varkappa$ ist

$$\varkappa\varkappa' = 4\sigma^{-12}, \qquad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}. \tag{12}$$

Die Ausrechnung nach $\varkappa^2$ bzw. $\varkappa'^2$ ergibt

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 2^6\,\sigma^{-24}}\right) \tag{13}$$

und schließlich die Wurzelziehung

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8\sigma^{-12}} + \sqrt{1 - 8\sigma^{-12}}\right]. \tag{14}$$

Die Transformation zweiter Ordnung ist für den SCHLAEFLIschen Modul durch

$$\omega' = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}, \qquad \sigma(\omega)\cdot\sigma(\omega') = \sqrt{2} \tag{15}$$

gegeben. Bewegt sich ω auf der Achse des Imaginären, so durchläuft ω' den Einheitskreis.

Unter den singulären Werten $\omega = i\sqrt{m}$ (m ganze rationale positive Zahl) betrachten wir vorerst die einfachsten Fälle.

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \omega = i\sqrt{3}, \quad \sigma^3 = 2, \quad \varkappa = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ &\text{(b)}\ \omega = i\sqrt{7}, \quad \sigma^2 = 2, \quad \varkappa = \frac{3-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{16}$$

und es gehört $\varkappa\sqrt{2}$ dem Klassenkörper der quadratischen Formen mit der Diskriminante $D = -3\cdot 2^4$ bzw. $-7\cdot 2^4$ an. Hingegen[7])

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \omega' = \tfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \quad \sigma^6 = 2, \quad \varkappa = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right) \\ &\text{(b)}\ \omega' = \tfrac{1}{4}\left(3 + i\sqrt{7}\right), \quad \sigma = 1, \quad \varkappa = \tfrac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{7}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

und es ist $\varkappa$ ausdrückbar durch den imaginär-quadratischen Körper $i\sqrt{3}$ bzw. $i\sqrt{7}$ und dem Klassenkörper von $D = -48$ bzw. -7. Im folgenden finden die allgemeineren Tatsachen Verwertung:

Für $m \equiv -1 \pmod 8$ ist $\sigma^3(\omega')$ eine Einheit aus dem Klassenkörper von $D = -m$, und es ist nicht nur $\varkappa^2$, sondern auch $\varkappa$ rational ausdrückbar

[7]) Das Vorzeichen der Quadratwurzeln in (14) bestimmt man leicht aus dem Polygon für $\varkappa$.

Bei Anwendung der Substitution für σ in (15) reproduzieren sich diese Irrationalitäten bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ bzw. $i\sqrt{2}$. Aus dieser Überlegung erkennt man die Übereinstimmung des WEBERschen Satzes über $\varkappa$, $D \equiv 5 \pmod 8$, (Algebra Bd. 3, S. 507) mit der nachfolgenden Formulierung für $m \equiv 3 \pmod 8$.

durch $i\sqrt{m}$ und dem Klassenkörper von $D=-m$. Bei $m \not\equiv 0 \pmod 3$ ist bereits $\sigma(\omega')$ Einheit aus diesem Klassenkörper [Beispiel (17b)].

Für $m \equiv 3 \pmod 8$ ist $\frac{1}{2}\sigma^3(\omega)$ eine Einheit aus dem Klassenkörper von $D=-4m$ und nicht nur $\varkappa^2$, sondern auch $\varkappa\sqrt{2}$ eine Zahl aus dem Klassenkörper von $D=-16m$ [Beispiel (16a)]. Bei $m \not\equiv 0 \pmod 3$ ist bereits $\sigma(\omega)$ eine ganze Zahl aus dem Klassenkörper von $D=-4m$.

Das letztere sei an dem Beispiel $m=11$ erläutert, das noch in Abschn. 7 (123) Verwendung findet. Als irrationale Modulargleichung für den elften Transformationsgrad hat man[8])

$$\sqrt{\varkappa(\omega)\,\varkappa(11\omega)} + \sqrt{\varkappa'(\omega)\,\varkappa'(11\omega)} + 2\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{\varkappa(\omega)\,\varkappa(11\omega)\,\varkappa'(\omega)\,\varkappa'(11\omega)} = 1. \tag{18}$$

Für $\omega = \frac{-1}{i\sqrt{11}}$ ist $\varkappa(11\omega)=\varkappa'(\omega)$ und $\varkappa'(11\omega)=\varkappa(\omega)$ und daraus ergibt sich für $\sigma\left(i\sqrt{11}\right)$ zufolge (12)

$$4\sigma^{-6} + 4\sigma^{-4} = 1 \quad \text{oder} \quad \sigma^6 - 4\sigma^2 - 4 = 0. \tag{19}$$

Die Reduzibilität dieser Gleichung

$$\sigma^3 - 2\sigma^2 + 2\sigma - 2 = 0 \tag{20}$$

ermittelt H. Weber nur auf induktivem Wege. Die Begründung dieser Reduzibilität und die Ausdehnung dieser Eigenschaften der singulären Werte auf höhere Stufen läßt sich aus dem oben erwähnten Problem in zwei Veränderlichen gewinnen.

Da bei $m \equiv -1 \pmod 8$ die Zahl 2 im imaginär-quadratischen Körper $i\sqrt{m}$ in zwei zueinander prime Idealteiler zerfällt, haben die Diskriminanten $D=-4m$ und $-m$ dieselbe Klassenzahl. Hingegen reduziert sich bei $m \equiv 3 \pmod 8$ die Klassenzahl von $D=-m$ auf den dritten Teil der Klassenzahl von $D=-4m$, so daß in diesen Fällen besonders kleine Werte erreicht werden. Um zu einer Verwendung der zugeordneten singulären Werte zu gelangen, hat man von der absoluten Invariante $j(\omega)$ auszugehen. Nach Weber sind für $\omega = i\sqrt{m}$, $m \equiv 3 \pmod 4$

$$\sqrt[3]{j(\omega')} \quad \text{und} \quad \sqrt{D(j(\omega')-12^3)}, \qquad \left(\omega' = \frac{\omega-1}{\omega+1}\right) \tag{21}$$

ganze Zahlen aus dem Klassenkörper von $D=-m$, wobei für die dreistufige Größe noch die Einschränkung $m \not\equiv 0 \pmod 3$ zu machen ist. Für $m \equiv 3 \pmod 8$ ist die kubische Gleichung in σ^8

$$\sigma^{24} - \sqrt[3]{j}\,\sigma^8 - 16 = 0 \tag{22}$$

stets irreduzibel, indem hierdurch die Verdreifachung der Klassenzahl zum Ausdruck gelangt. Setzt man

$$j = -2^6\xi^3, \qquad j - 12^3 = -2^6 m\eta^2, \tag{23}$$

[8]) R. Fricke, Elliptische Funktionen Bd. 2, S. 526.

so wird ein elliptisches Gebilde vom äquianharmonischen Fall

$$\xi^3 + 27 = m\eta^2 \tag{24}$$

erhalten. Für $D = -m$

$$m = 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163 \tag{25}$$

hat die Klassenzahl den Wert eins und ξ und η stellen die Grundlösung der diophantischen Gleichung (24) in rationalen Zahlen dar. Nach WEBER erhält man für $m \equiv 3 \pmod 8$ die ganzzahligen Werte[9])

(26a)

m	ξ	η
11	8	7
19	$3 \cdot 8$	3^3
43	$3 \cdot 80$	$3^4 \cdot 7$
67	$3 \cdot 440$	$3^3 \cdot 7 \cdot 31$
163	$3 \cdot 53360$	$3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127$.

Für die erste fehlende Primzahl 59 existiert die Grundlösung

$$59 \qquad -\frac{7 \cdot 19}{2^6} \qquad \frac{283}{2^9}, \tag{26b}$$

die sich zwar nicht mehr in ganzen Zahlen darstellt. Jedoch liefert der singuläre Wert $\omega = i\sqrt{59}$ für $\xi(\omega')$ eine ganzzahlige Lösung von (24) im kubischen Klassenkörper. Nimmt man die drei konjugierten Werte zur oberen Grenze des Integrals erster Gattung von (24) und ermittelt nach dem Additionstheorem die obere Grenze der Integralsumme, so erhält man (26b). Dies konstruktive Verfahren führt zu einem allgemeineren Beweise für die Existenz der Grundlösung nur bei Erweiterung der Ergebnisse WEBERS[10]). In anderen Fällen werden wir indessen unmittelbar zum Ziel gelangen (Abschn. 4).

Zu der abbrechenden Zahlenreihe (25) bemerkt WEBER, daß die Anzahl bisher nur durch Induktion festgestellt ist[11]). Indessen werden die

[9]) Algebra Bd. 3, S. 462 u. 504. Die auffällige Zerlegbarkeit erklärt sich aus Abschn. 5 u. 10 meiner Arbeit. So ist

$$\xi = 4\zeta(\alpha\beta + 1)\left(\frac{\beta\zeta}{2\alpha} - 1\right).$$

[10]) Ein solcher Zusatz ist: Die Wurzelausdrücke

$$\sqrt{3(\xi + 3)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{-\xi - 3\varepsilon} + \sqrt{-\xi - 3\varepsilon^2}, \qquad (\varepsilon^3 = 1)$$

ergeben Zahlen aus dem Klassenkörper von $D = -m$ für $m \equiv 7$ bzw. $11 \pmod{12}$. Alsdann läßt sich nach Abschn. 4 der Satz beweisen:

Die diophantische Gleichung

$$\xi^3 + 27 = p\eta^2, \qquad p \equiv 3 \pmod 4$$

hat immer eine Lösung in rationalen von Null verschiedenen Zahlen.

[11]) Algebra, Bd. 3, S. 460, Anmerkung. Ferner C. F. GAUSS, Disq. arithm. 5. Abschn. Art. 303.

Entwicklungen über Modulfunktionen, die sich an (22) anschließen, einen fast elementaren Beweis ergeben, daß mit $D = -3, -4, -8, -12, -16, -27, -28$ diese Zahlen die einzigen sind, bei denen die Klassenzahl den Wert eins erhält.

2. Reduzierbare Integrale.

Das algebraische Gebilde in (14)

$$\sqrt{\sigma^{12} + 8}, \qquad \sqrt{\sigma^{12} - 8} \tag{27}$$

vom Geschlechte $g = 5 + 5 + 11 = 21$ enthält das hyperelliptische Gebilde

$$\sqrt{x^{12} - c^3} \tag{28}$$

vom Geschlechte $g = 5$ ersichtlich auf dreifache Weise, nämlich für die Werte $c = 2, -2, 4$. Wir untersuchen (28) auf Reduzierbarkeit. Vermöge

$$x^2 = y \tag{29}$$

erhält man die Zerlegung

$$\sqrt{y^6 - c^3}, \qquad \sqrt{y(y^6 - c^3)}. \tag{30a, b}$$

Desgleichen wird (30a) durch

$$y^2 = z \tag{31}$$

in die beiden elliptischen Gebilde

$$\sqrt{z^3 - c^3}, \qquad \sqrt{z(z^3 - c^3)} \tag{32a, b}$$

vom äquianharmonischen Fall zerlegt. Unter den fünf linear unabhängigen Integralen erster Gattung von (28)

$$\int \frac{x^\nu \, dx}{\sqrt{x^{12} - c^3}} \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{33}$$

sind die zu (32a, b) gehörigen durch $\nu = 3, 1$ gegeben. Ein drittes durch $\nu = 2$ gegebenes Integral tritt auf, wenn (28) durch

$$x^3 = u \tag{34}$$

reduziert wird. Es ergibt sich das elliptische Gebilde

$$\sqrt{u^4 - c^3} \tag{35}$$

vom harmonischen Fall. Andrerseits läßt sich das hyperelliptische Gebilde vom Geschlechte $g = 3$ in (30b) vermöge

$$y - \frac{c}{y} = w \tag{36}$$

in

$$\sqrt{w(w^2 + 3c)}, \qquad \sqrt{w(w^2 + 3c)(w^2 + 4c)} \tag{37a, b}$$

zerlegen. Das elliptische Gebilde liefert vermöge (36) und (29) das Integral erster Gattung

$$\int \frac{(x^4 + c)\,dx}{\sqrt{x^{12} - c^3}}. \tag{38}$$

Daher ist das zu (35) gehörige Integral in den hyperelliptischen Integralen von (37b) enthalten. Setzt man

$$u^2 = v, \quad \text{so ist} \quad y^3 = v. \tag{39a}$$

Andrerseits wird

$$w(w^2 + 3c) = y^3 - \frac{c^3}{y^3} = v - \frac{c^3}{v} = t \tag{39b}$$

gesetzt und (35) geht über in

$$\sqrt{v(v^2 - c^3)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{t(t^2 + 4c^3)}. \tag{40a, b}$$

In der Tat führt die Reduktion dritten Grades

$$t = w(w^2 + 3c), \qquad dt = 3(w^2 + c)\,dw \tag{41}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t^2 + 4c^3)}} \quad \text{in} \quad 3\int \frac{dw}{\sqrt{w(w^2 + 3c)(w^2 + 4c)}} \tag{42}$$

über, und dieses Integral wird auch vermöge (36) und (29) in (33), $\nu = 2$ transformiert. Das zweite reduzierbare Integral der Reduktion dritten Grades gewinnt man durch die Substitutionen

$$w = \frac{2\sqrt{3}\,c}{w'}, \qquad t = \frac{6\sqrt{3}\,c^2}{s}. \tag{43}$$

Die erste reproduziert (37b) und an Stelle von (40b) und (41) treten

$$\sqrt{s(s^2 + 3^3 c)}, \qquad s = \frac{w^3}{w^2 + 4c}. \tag{44}$$

Das zugehörige Integral erster Gattung nimmt die Gestalt

$$\int \frac{(x^4 - c)\,dx}{\sqrt{x^{12} - c^3}} \tag{45}$$

an, so daß das hyperelliptische Gebilde (30b) die drei unabhängigen elliptischen Integrale (45), (38), (33), $\nu = 2$ vom harmonischen Fall enthält. In (28) treten die beiden Integrale vom äquianharmonischen Fall (33) $\nu = 1, 3$ hinzu und schließlich *ergeben sich für das algebraische Gebilde* (27) *sechs linear unabhängige elliptische Integrale vom äquianharmonischen Fall und neun linear unabhängige elliptische Integrale vom harmonischen Fall.* Die weitere Analyse ergibt noch zwei elliptische Integrale mit der komplexen Multiplikation im Körper $i\sqrt{2}$. Die restlichen vier Integrale ergeben singuläre hyperelliptische Moduln.

3. Erste Anwendungen.

Aus der Darstellung von z durch σ in (14) und den Angaben über $\omega = i\sqrt{m}$, $m \equiv -1 \pmod 8$, $\not\equiv 0 \pmod 3$ ergibt sich, daß eine der beiden Quadratwurzeln in (27) für die singulären Werte $\sigma(\omega')$ im Klassenkörper von $D = -m$ aufgeht, hingegen die andere mit $-m$ zu multiplizieren ist, um diese Eigenschaft zu erlangen. Aus der arithmetischen Theorie des Gaussschen arithmetisch-geometrischen Mittels ergibt sich allgemein die Entscheidung

$$\text{(46)} \qquad \sigma^{12} + 8 = \text{Quadrat}, \qquad -m(\sigma^{12} - 8) = \text{Quadrat}$$

und der Fall $m = 7$, $\sigma = 1$ bestätigt dies. Die diophantische Analyse im nächsten Abschnitt gibt indessen Gelegenheit, von diesem speziellen Fall auf den jeweils benötigten allgemeineren Fall zu schließen. Zunächst vergegenwärtigen wir uns die durch $m = 7$, $\sigma = 1$ gelösten diophantischen Gleichungen. $\sigma = 1$ ergibt für die in (28), (29), (31), (34), (39a) eingeführten Variabeln x, y, z, u, v für alle c den Wert eins. Zunächst liefert (35) die drei diophantischen Gleichungen

$$\text{(47)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7(u^4 - 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(b)} \quad u^4 + 8 = \text{Quadrat} \\ &\text{(c)} \quad -7(u^4 - 8^2) = \text{Quadrat} \end{aligned}$$

mit der Grundlösung $u = 1$. (47b) stimmt mit der Fermat-Lagrangeschen Gleichung in (10) überein. (47a und c) lassen sich durch lineare Substitution $u = 2u'$ bzw. quadratische Transformation $u^2 = 8a/b$ auf Gleichungen zurückführen, deren Verzweigungspolynom mit (8) bzw. (2) bis auf den Faktor -14 übereinstimmt. Ferner ergibt sich aus (36) und (37a) für $c = 2, -2, 4$

$$\text{(48)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7w(w^2 + 6) = \text{Quadrat}, \quad w = -1 \\ &\text{(b)} \quad w(w^2 - 6) = \text{Quadrat}, \quad w = 3 \\ &\text{(c)} \quad -7w(w^2 + 12) = \text{Quadrat}, \quad w = -3 \end{aligned}$$

und schließlich aus (44)

$$\text{(49)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7s(s^2 + 2 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = -\frac{1}{9} \\ &\text{(b)} \quad s(s^2 - 2 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = 3^3 \\ &\text{(c)} \quad -7s(s^2 + 4 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = -\frac{3^3}{5^2}. \end{aligned}$$

Diese *neun diophantischen Gleichungen sind innerhalb des natürlichen Rationalitätsbereiches als voneinander verschieden anzusehen.* Andrerseits fehlt unter den auflösbaren Gleichungen, deren Koeffizienten aus den

Zahlen 2 und 3 zusammengesetzt sind, die von EULER behandelte einbasige Gleichung[12])

$$3v^4 + 1 = \text{Quadrat} \tag{50}$$

mit den Lösungen $v = 0, 1, 2$. Vermittels

$$v^2 w^2 - 4w - 12v^2 = 0 \tag{51}$$

wird diese birational transformiert in

$$w(w^2 - 12) = \text{Quadrat} \tag{52}$$

und es geht (52) aus (37a) hervor, wenn $c = -4$ gesetzt wird. Die Beziehung zwischen $\varkappa$ und σ läßt sich aber so schreiben:

$$4\frac{1-\varkappa^2}{\varkappa} = \left(\frac{2}{\sqrt{\varkappa}\,\sigma^4}\right)^6 = x^6 \tag{53}$$

und die Ausrechnung nach $\varkappa$ in Abhängigkeit von x ergibt eine Gleichung (28) für $c = -4$. Nunmehr ist eine Anleihe aus der arithmetischen Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels erforderlich, daß bei $m \equiv -1 \pmod 8$ ein $\varkappa$ existiert, für das auch $\sqrt{\varkappa}$ rational ausdrückbar ist durch $i\sqrt{m}$ und den Klassenkörper von $D = -m$. Für $m = 7$, $\sigma = 1$ hat man

$$\sqrt{\varkappa} = \tfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{7}\right), \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{7}\right) \tag{54a}$$

und erhält nach (29) und (36)

$$y = -\tfrac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{7}\right), \qquad w = -3. \tag{54b}$$

Die so gefundene Lösung von (52) ist aber nicht die Grundlösung. Diese ist vielmehr $v = 1$, $w = -2$, so daß also nicht jedes Verfahren auf die Grundlösung führt. Für die anderen elliptischen Gebilde vom harmonischen Fall in (40b) und (44) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -7t(t^2 - 16^2) = \text{Quadrat}, \quad t = 9 \\ &\text{(b)} \quad -7s(s^2 - 4 \cdot 3^3) = \text{Quadrat}, \quad s = \tfrac{27}{7}. \end{aligned} \tag{55}$$

Durch $t = -16a : b$ geht (55a) wiederum in das Polynom von (2) bis auf den Faktor -7 über.

Werfen wir noch einen Blick auf den äquianharmonischen Fall in (32a, b). Durch $z = 1$ werden die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a, b)} \quad -7(z^3 - 8) = \text{Quadrat}, \quad -7z(z^3 - 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(c, d)} \quad z^3 + 8 = \text{Quadrat}, \quad z(z^3 + 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(e, f)} \quad -7(z^3 - 4^3) = \text{Quadrat}, \quad -7z(z^3 - 4^3) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{56}$$

[12]) Arithmetische Schriften Bd. II, LXXXVI, S. 474—487, letztes Beispiel.

gelöst, die sich sämtlich auf die Normalform

$$(57) \qquad n(z^3+1) = \text{Quadrat}, \qquad \begin{matrix} n = 14, & -7, & 2, & 1, & 7, & -7 \\ z = -\frac{1}{2}, & -2, & \frac{1}{2}, & 2, & -\frac{1}{4}, & -4 \end{matrix}$$

zurückführen lassen. (56d) oder (57), $n=1$ ist eine viel zitierte, von Euler untersuchte Gleichung. Außer den Lösungen $z=0$ und $z=2$, die eine rationale Periodensechsteilung darstellen, hat diese keine eigentlichen Lösungen. Ferner ist zu bemerken, daß (57), $n=-7$ auf zweifache Weise durch (56b und f) gelöst wird. Indessen ergeben die Lösungswerte $z=-2$ und -4 als Grenzen des Integrals erster Gattung eine halbe Periode, so daß auch diese Gleichung einbasig ist.

Bei $m \equiv 3 \pmod 8$ gibt nur $m=3$, $\sigma^3=2$ rationale Lösungen. Setzen wir $\sigma^3=2u$, so stellt $u=1$ die Lösung dar, und die Quadratwurzeln (27) sind in der Weise anzusetzen:

$$(58a, b) \qquad 3(2u^4+1) = \text{Quadrat}, \qquad 2u^4-1 = \text{Quadrat}.$$

Die zweite Gleichung ist die Fermat-Lagrangesche Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt (8). Die Produktbildung aus (58a und b) und Reduktion durch $u^2=u_*$ ergibt

$$(59) \qquad 3(4u_*^4-1) = \text{Quadrat}, \qquad u_*=1$$

und die weitere Transformation $u_*^2 = a/2b$ führt auf die Lösung von

$$(60) \qquad 6ab(a^2-b^2) = \text{Quadrat}$$

durch das Harpedonapten-Dreieck.

4. Allgemeinere Ausführungen.

Zu allgemeineren Sätzen gelangt man durch folgende Hilfsbetrachtung. Gegeben sei ein Polynom $P_4(x)$ vom vierten Grade in x, dessen Koeffizienten im Zahlkörper k liegen. Ferner seien x_0 und y_0 ein Lösungssystem der diophantischen Gleichung

$$(61) \qquad P_4(x) = y^2$$

in einem Oberkörper K von ungeradem Relativgrade h, so daß x_0 durch eine in k irreduzibele Gleichung $f_h(x)=0$ vom Grade h gegeben ist und die Zahl y_0 sich durch x_0 eindeutig als ein Polynom $f_{(h-\nu)}(x)$ mit Koeffizienten in k vom Grade $h-\nu$ darstellen läßt, wobei die ganze Zahl ν im allgemeinen $=1$, in besonderen Fällen >1 sein kann. Alsdann gilt für $h-\nu>2$ die Identität

$$(62) \qquad P_4(x) \equiv f_{(h-\nu)}^2(x) - f_h(x) \cdot f_{(h-2\nu)}(x),$$

wenn $f_{(h-2\nu)}$ ein Polynom vom Grade $h-2\nu$ bedeutet, dessen Koeffizienten in k liegen. Je nachdem $f_{(h-2\nu)}$ in k irreduzibel ist oder nicht,

erhält man eine oder mehrere Lösungen von (61) in einem Oberkörper K', dessen Relativgrad $h' < h$ ist. Da $h \equiv 1 \pmod 2$ vorausgesetzt war, gibt es auch mindestens ein $h' \equiv 1 \pmod 2$. Die Wiederholung des Verfahrens führt notwendig zu einer Lösung in k. Es ist notwendig $y \neq 0$, wenn P_4 keine Wurzel in k zu liegen hat.

Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen lehrt, daß man das Rekursionsverfahren in einen Schritt zusammenziehen kann. In der Tat: Wenn $f_{(h-\nu)}$ nicht schon vom Grade $\frac{1}{2}(h+1)$ ist, läßt sich immer ein f_* vom Grade $\frac{1}{2}(h-3)$ finden, so daß $f_* \cdot f_{(h-\nu)}$ modulo f_h sich auf ein f_{**} reduziert, dessen Grad gleich $\frac{1}{2}(h+1)$ oder kleiner ist und es gilt die Identität

$$f_*^2(x) P_4(x) \equiv f_{**}^2(x) - l(x) \cdot f_h(x), \tag{63}$$

wobei l ein Linearfaktor in x oder konstant ist. In letzterem Falle erhält man die Lösung $x = \infty$.

Von den singulären Werten hatten wir nachgewiesen, daß sie Lösungen in den Klassenkörpern für die elliptischen Gebilde von Abschn. 2 erzeugen. Wird der natürliche Rationalitätsbereich als Körper k gewählt und der Klassenkörper als Oberkörper K, so muß m auf Primzahlen $p \equiv -1 \pmod 4$ eingeschränkt werden, damit der Grad von K ungerade wird. Daß das Verfahren zu keiner trivialen Lösung führt, läßt sich ohne weitere Hilfsmittel an den elliptischen Gebilden (35) in Abschn. 2, bei denen die Polynome keine rationale Wurzel haben, allgemein feststellen. Zunächst ergibt sich für $m = p \equiv -1 \pmod 8$ die Entscheidung

$$u^4 + 8 = \text{Quadrat}, \qquad u^4 - 8 \neq \text{Quadrat}. \tag{64a, b}$$

Da nur die Gleichung (64a) in rationalen Zahlen lösbar ist, kann nur diese in allen Klassenkörpern von $D = -p$ lösbar sein. Daraus ergeben sich die Sätze:

Die diophantischen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad -p(u^4 - 8) = \text{Quadrat} \\ &\text{(b)} \quad -p(u^4 - 8^2) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{65}$$

sind für alle Primzahlen $p \equiv -1 \pmod 8$ *in rationalen Zahlen lösbar.* Ebenso ergibt sich für $m = p \equiv 3 \pmod 8$, daß (58b) in allen Klassenkörpern von $D = -4p$ lösbar ist, und die Sätze:

Die diophantischen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad p(2u^4 + 1) = \text{Quadrat} \\ &\text{(b)} \quad p(4u^4 - 1) = \text{Quadrat} \end{aligned} \tag{66}$$

sind für alle Primzahlen $p \equiv 3 \pmod 8$ *in rationalen Zahlen lösbar.* Die Sätze (65b) und (66b) sind die bereits in der Einleitung unter (7) für $n = 2p$ genannten. Der Beweis der Sätze für $n = p$ ($p \equiv 5, 7 \pmod 8$) erfordert weitere Hilfssätze über singuläre Moduln.

Als Zahlkörper k kann auch ein Unterkörper des Klassenkörpers gewählt werden, insbesondere die Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen, durch die die Klassengleichung entsprechend der Anzahl der Geschlechter des imaginär-quadratischen Zahlkörpers zerfällt. Alsdann läßt sich das konstruktive Verfahren dahin erweitern, daß man durch subtraktive Anwendung des Additionstheorems zu anderen Werten von n gelangt, in denen die diophantische Gleichung einbasig ist.

Im folgenden wird der Fall $m \equiv 3 \pmod 8$ erörtert, in welchem k und K die Klassenkörper von $D = -m$ bzw. $-4m$ sind. K ist alsdann ein kubischer Relativkörper. Indem dieser durch die allgemeine kubische Gleichung für σ^8 in (22) ersetzt wird, gelangt man zu einem Studium von Modulsystemen, das eine besondere Methode darstellt, algebraische Gebilde auf reduzierbare Integrale zu untersuchen (Abschn. 6 bis 8). Diese Entwicklungen sind um so bemerkenswerter, als sie zu einem endgültigen Resultat über die imaginär-quadratischen Körper von der Klassenzahl eins führen (Abschn. 9) und eine diophantische Methode zur Berechnung der Klasseninvarianten eröffnen (Abschn. 10).

5. Entwicklungen über Modulfunktionen.

Die kubische Gleichung für σ^8 in (22)

$$\sigma^{24} - \sqrt[3]{j}\,\sigma^8 - 16 = 0 \tag{67}$$

läßt sich durch eine solche in σ^4 ersetzen, bei der die Summe der Quadrate der Wurzeln verschwindet. Dies ergibt den Ansatz

$$\sigma^{12} + 2\zeta\,\sigma^8 + 2\zeta^2\,\sigma^4 - 4 = 0 \tag{68}$$

und die Beziehung

$$\sqrt[3]{j} = -4\zeta\,(\zeta^3 + 4). \tag{69}$$

Ebenso ergibt der Ansatz

$$\sigma^6 + 2\alpha\,\sigma^4 + 2\beta\,\sigma^2 - 2 = 0 \tag{70}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \zeta &= 2\,(\beta - \alpha^2) \\ \zeta^2 &= 2\,(\beta^2 + 2\alpha) \end{aligned} \tag{71}$$

und daraus

$$(\beta - 2\alpha^2)^2 = 2\alpha\,(\alpha^3 + 1). \tag{72}$$

Der Parameter ζ ist ein Hauptmodul der zwölften Stufe vom Index 12, die Parameter α und β stellen ein Modulsystem der 24. Stufe vom Index 48 dar. Weiterhin erkennt man, wenn (69) in die dritte Potenz erhoben wird, in ζ^3 einen Hauptmodul vierter Stufe, der die bekannte Oktaederresolvente vierten Grades darstellt. Ferner läßt sich aus (71)

ein Hauptmodul ϑ achter Stufe ableiten, indem man setzt

$$\zeta = \vartheta\beta = 2(\beta - \alpha^2) \tag{73}$$

und

$$\beta = -2\alpha^2/(\vartheta - 2)$$

in (72) einsetzt:

$$\alpha^3 = \frac{(\vartheta-2)^2}{\vartheta^2-2}, \qquad \beta^3 = -8\frac{\vartheta-2}{(\vartheta^2-2)^2}, \tag{74}$$

$$\zeta^3 = -8\frac{\vartheta^3(\vartheta-2)}{(\vartheta^2-2)^2}. \tag{75}$$

Ebenso wie $\sqrt[3]{j}$ nehmen diese Moduln bei $m \equiv 3 \pmod 8$ singuläre Werte im Klassenkörper von $D = -m$ an, während σ^2 im Klassenkörper von $D = -4m$ liegt. σ^2 ergibt sich aus der quadratischen Transformation von $\sigma^2(i\sqrt{m})$ nach (15) und ist wie $\sigma^2(i\sqrt{m})$ eine ganze Zahl. Denn es sind $\frac{1}{4}\sigma^6(i\sqrt{m})$ und $\frac{1}{2}\sqrt{2}:\sigma(i\sqrt{m})^6$ algebraische Einheiten (Abschn. 1). Da die Zahl 2 im Klassenkörper von $D = -m$ nur in voneinander verschiedene Idealfaktoren zerfallen kann, folgt, daß auch ζ, α, β ganze Zahlen sind. In dem Falle der Klassenzahl eins hat man unter Verwendung der Ergebnisse H. Webers:

(76)

m	α	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{1}{2}\zeta$	ϑ
3	0	0	0	2
11	1	0	−1	∞
19	−1	1	1	1
43	2	1	−2	−2
67	1	2	3	3/2
163	2	7	10	10/7.

6. Der äquianharmonische Fall.

Die Betrachtung reduzierbarer Integrale in Abschn. 2 führte auf sechs elliptische Integrale vom äquianharmonischen Fall (32a, b), ($c = 2, -2, 4$). Die durch die singulären Werte im Klassenkörper von $D = -4m$ erzeugten Lösungen der zugehörigen diophantischen Gleichungen lassen sich bei $m \equiv 3 \pmod 8$ auf Lösungen im Klassenkörper von $D = -m$ vermittels des Additionstheorems nach Abschn. 4 reduzieren. Dieser Reduktionsprozeß läßt sich durch den Hauptmodul ζ oder das Modulsystem α, β allgemeingültig darstellen. Hierbei beansprucht jedes einzelne Ergebnis Interesse.

Eine erste Folgerung ergibt die Umformung von (68)

$$\sigma^4(\sigma^4 + 2\zeta)^2 = -\sigma^{12} + 8, \tag{77}$$

in die $\sigma^4 = -2/z$ zu substituieren ist:

$$z^3 + 1 = -(\zeta z - 1)^2. \tag{78}$$

Im natürlichen Rationalitätsbereich hat

$$-(z^3+1) = \text{Quadrat} \tag{79}$$

keine Lösung. Die Gleichung (78) besagt aber, daß *auch im Klassenkörper von* $D=-m$ *keine Lösung erhalten wird*, indem die Anwendung des Additionstheorems auf die bezüglich dieses Körpers konjugierten Werte $z=-2\sigma_i^{-4}$, $(i=1, 2, 3)$ eine volle Periode ergibt.

Die zweite Reduktionsmöglichkeit für $c=2$ in (32) läßt sich durch das Modulsystem (α, β) behandeln, wenn man σ^2 zufolge (70) durch σ^4 und σ^8 ausdrückt:

$$2\sigma^2(2\alpha\beta+1) = \sigma^8 - 2\sigma^4(2\alpha^2-\beta) + 4\alpha \tag{80}$$

und die linke Seite von (77) in das Quadrat eines Polynoms in σ^4 verwandelt:

$$[\sigma^8 - 2\sigma^4(2\alpha^2-\beta) + 4\alpha]^2(\sigma^4+2\zeta)^2 = -4(2\alpha\beta+1)^2(\sigma^{12}-8), \tag{81}$$

so daß die diophantische Gleichung

$$2z(z^3+1) = \text{Quadrat} \tag{82}$$

in $z=-2\sigma^{-4}$ eine Lösung hat. Um die gewünschte Lösung zu erhalten, ist die linke Seite von (81) vermittels (68) auf das Quadrat eines quadratischen Polynoms in σ^4 zu reduzieren. (81) stellt alsdann eine Gleichung vierten Grades in σ^4 dar, die außer (68) noch einen linearen Faktor enthält, der in z die Lösung

$$z = \frac{2(2\alpha^2-\beta)^2}{2(2\alpha\beta+1)^2-(2\alpha\zeta+1)^2} = \frac{4\alpha(\alpha^3+1)}{-8\alpha^3+1} \tag{83}$$

ergibt. (83) *stellt die Duplikatur des zu* (82) *gehörigen elliptischen Integrals dar* und die so gefundene Lösung im Klassenkörper von $D=-m$ kann allgemein nicht mehr auf die Grundlösung $z=1$ von (82) führen.

Bei den weiteren elliptischen Gebilden (32a, b), $c=4$, -2 ist das Verzweigungspolynom mit dem Faktor m bzw. $2m$ zu multiplizieren. In den allgemeinen Formeln tritt alsdann die Diskriminante der kubischen Gleichung (68)

$$D(\zeta) = -2^4(\zeta^6+10\zeta^3+27) \tag{84}$$

bzw. die von (70)

$$\begin{aligned} D(\alpha,\beta) &= 2^2(4\alpha^2\beta^2+16\alpha^3-8\beta^3-36\alpha\beta-27) \\ &= -2^2(4\alpha\beta-2\alpha^3+5)^2 - 2^3(3\alpha\beta-2\alpha^3+1)^2 \end{aligned} \tag{85}$$

als Faktor auf. Zur Herstellung solcher Formeln kann man davon ausgehen, daß das Polynom in (68) für $\sigma^4=-2$ den Wert

$$-4(\zeta^2-2\zeta+3) \tag{86}$$

annimmt, der einen Teiler der Diskriminante (84) darstellt, und gewinnt die Formel

$$(87) \qquad (\sigma^4+2)(\sigma^4+\zeta-1)^2 = -(\zeta^2-2\zeta+3)(\sigma^4-2).$$

Übt man auf diese die (68) in sich transformierenden Substitutionen

$$(88) \qquad \sigma = \varepsilon\sigma', \qquad \zeta = \varepsilon\zeta', \qquad \varepsilon^3 = 1$$

aus und multipliziert die drei Gleichungen, so erhält man

$$(89) \qquad (\sigma^{12}+8)\left[(\sigma^4+\zeta)^3-1\right]^2 = -(\zeta^6+10\zeta^3+27)(\sigma^{12}-8)$$

und durch Kombination mit (77)

$$(90) \qquad (\sigma^{12}+8)\left[(\sigma^4+\zeta)^3-1\right]^2 = (\zeta^6+10\zeta^3+27)\,\sigma^4(\sigma^4+2\zeta)^2.$$

Nunmehr läßt sich die Division durch $(\sigma^4+2\zeta)^2$ ausführen

$$(91) \qquad (\sigma^{12}+8)(3\sigma^8+4\zeta\sigma^4+2\zeta^2)^2 = 2^4(\zeta^6+10\zeta^3+27)\,\sigma^4$$

und die Multiplikation mit $\sigma^{12}+8$ ergibt links das Quadrat eines Polynoms in σ^4, das wiederum vermittels (68) zu reduzieren ist:

$$(92) \qquad \left[(\zeta^3+9)\sigma^8+6\zeta\sigma^4+4\zeta^2\right]^2 = (\zeta^6+10\zeta^3+27)\,\sigma^4(\sigma^{12}+8).$$

Setzt man noch $\sigma^4 = 2/z$, so läßt sich (92) in die Identität

$$(93) \qquad \begin{aligned}(\zeta^6+10\zeta^3+27)(z^3+1) \equiv{}& (\zeta^2z^2+3\zeta z+\zeta^3+9)^2 \\ &-(\zeta^4z-4\zeta^3-27)(z^3-\zeta^2z^2-2\zeta z-2)\end{aligned}$$

umsetzen. Die Lösung aus dem linearen Faktor

$$(94) \qquad z = 4\zeta^{-1}+27\zeta^{-4}$$

liefert

$$(95) \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{z^3+1}} = 4\int\frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^6+10\zeta^3+27}}.$$

Zufolge (88) wird (93) durch $\zeta = \varepsilon\zeta'$, $z = \varepsilon^2 z'$ in sich transformiert und die Identität läßt sich einfacher dadurch gewinnen, daß man diese zunächst für die niedersten Fälle $m = 11, 19$ aufstellt, und daraus den allgemeinen Fall für den Hauptmodul ζ kombiniert.

Für das Modulsystem (α, β) läßt sich diese Methode an der zweiten Reduktionsmöglichkeit exemplifizieren. Hierzu bringt man in (92) σ^4 auf die linke Seite und drückt nach (80) σ^2 durch σ^8 und σ^4 aus. Alsdann tritt links das Quadrat des folgenden Ausdrucks

$$(96) \qquad \frac{\left[(\zeta^3+9)\sigma^8+6\zeta\sigma^4+4\zeta^2\right]\left[\sigma^8-2\sigma^4(2\alpha^2-\beta)+4\alpha\right]}{2\sigma^4(2\alpha\beta+1)}$$

auf, der durch (68) auf ein quadratisches Polynom zu reduzieren ist. Der Faktor

$$(97) \qquad 2(2\alpha\beta+1) = \sqrt{D(\zeta):D(\alpha,\beta)}$$

hebt sich sowohl aus dem Bruch (96) als auch aus der Gleichung heraus, wodurch eine wesentliche Vereinfachung im Endergebnis eintritt. Die unmittelbare Ausrechnung ist schwer durchführbar. Indessen kann man aus (96) die Dimension der Polynome in α und β leicht feststellen und gelangt unter Benutzung der niedersten Fälle $m = 11, 19, 43$ zu der Gleichung in $z = \frac{1}{2}\sigma^4$

$$(98) \qquad -\tfrac{1}{2} D(\alpha,\beta)\cdot(z^3+1) = [2g_2(\alpha,\beta)z^2 - 2g_4(\alpha,\beta)z + g_3(\alpha,\beta)]^2,$$

wobei

$$(99) \qquad \begin{aligned} g_2(\alpha,\beta) &= 2\alpha^2 - 3\beta \\ g_4(\alpha,\beta) &= \alpha - 2\alpha^2\beta + 3\beta^2 \\ g_3(\alpha,\beta) &= -4\alpha^3 + 9 + 8\alpha\beta \end{aligned}$$

ist. *Die Lösung der diophantischen Gleichung*

$$(100) \qquad 2m(z^3+1) = \text{Quadrat}$$

im Klassenkörper von $D = -m$ ist alsdann

$$(101) \qquad z = [g_3^2(\alpha,\beta) + \tfrac{1}{2} D(\alpha,\beta)] : 2g_2^2(\alpha,\beta).$$

In den Fällen (32), $c = 4$ geht man zweckmäßig von der ursprünglichen kubischen Gleichung (67) in σ^8 aus. Setzt man wie in (23)

$$(102) \qquad \sqrt[3]{j} = -4\xi,$$

so ergeben die zu (86) bis (92) analogen Entwicklungen das Resultat

$$(103) \qquad [\sigma^{-8}(\sigma^{24} - 2^6)(\sigma^{24} + 2^3)]^2 = -2^6(\xi^3 + 27)\sigma^8(\sigma^{24} - 2^6).$$

Die Reduktion auf der linken Seite ergibt, wenn $z = -4\sigma^{-8}$ substituiert wird, die Identität

$$(104) \qquad \begin{aligned} -4(\xi^3+27)(z^3+1) \equiv{}& (3\xi z^2 + \xi^2 z + 18)^2 \\ & - (9\xi^2 z + \xi^3 + 108)(z^3 + \xi z^2 + 4). \end{aligned}$$

Die durch den linearen Faktor gegebene Lösung und (69)

$$(105) \qquad z = -\tfrac{1}{9}\dot{\xi} - 12\xi^{-2}, \qquad \xi = \zeta(\zeta^3 + 4)$$

liefern

$$(106) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{-z^3-1}} = -3\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3+27}} = -12\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^6 + 10\zeta^3 + 27}}.$$

Die Deutung für die singulären Werte ist unmittelbar. *Die im Klassenkörper von $D = -m$ gefundene Lösung* (105) *der diophantischen Gleichung*

$$(107) \qquad -m(z^3+1) = \text{Quadrat}$$

ist die durch die komplexe Multiplikation des äquianharmonischen Falles gegebene kubische Transformation der in Abschn. 1, (24) *gegebenen Lösung.*

Der letzte Fall läßt sich in Analogie zu (96) bis (101) entwickeln, indem σ^4 vermöge (68) durch σ^8 und σ^{16} auszudrücken ist. Wenn $\sigma^8 = -4z_*$ gesetzt wird, erhält man die Identität

$$\begin{aligned}(108)\qquad 4(\zeta^6+10\zeta^3+27)(z_*^3+1) &\equiv [2\zeta^2 z_*^2+\zeta(\zeta^3+6)z_*-(2\zeta^3+9)]^2\\ &\quad -(\zeta^4 z_*-4\zeta^3-27)[4z_*^3+z_*\zeta(\zeta^3+4)+1].\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (93) zeigt, daß *nicht nur dieselbe diophantische Gleichung*

$$(109)\qquad m(z^3+1)=\text{Quadrat}$$

gelöst wird, sondern auch dieselbe Lösung (94) *erhalten wird*, so daß die im Klassenkörper von $D=-4m$ durch $z=2\sigma^{-4}$ und $z_*=-\frac{1}{4}\sigma^8$ gegebene Zweibasigkeit bereits bei der Reduktion der Lösungen auf den Klassenkörper von $D=-m$ aufgehoben wird.

7. Der harmonische Fall.

Von den neun in Abschn. 2 gefundenen elliptischen Integralen vom harmonischen Fall gibt es nur drei, nämlich die mit dem Wert $c=4$, bei denen die gestellte Aufgabe mit dem Modulsystem (α, β) gelöst werden kann. Für die Gleichung (35) ist der in (73) definierte Hauptmodul ϑ der achten Stufe ausreichend, was im folgenden näher ausgeführt wird.

Aus (89) gewinnt man vermöge (68) unmittelbar eine Gleichung in σ^{12}

$$(110)\qquad (\sigma^{12}+8)(\tfrac{1}{2}\sigma^{12}-\zeta^3-5)^2=-(\zeta^6+10\zeta^3+27)(\sigma^{12}-8).$$

Da $\sigma^6=2u$ zu substitutieren ist, bedürfen wir einer Gleichung in σ^6

$$(111)\qquad \sigma^{18}+2a\sigma^{12}+4b\sigma^6-8=0,$$

deren Koeffizienten sich rational durch ϑ darstellen:

$$\begin{aligned}(112)\qquad a &= 4\alpha^3-6\alpha\beta-3=(\vartheta^2-4\vartheta-2):(\vartheta^2-2)\\ b &= 2\beta^3+6\alpha\beta+3=(3\vartheta^4-12\vartheta^3+12\vartheta^2+8\vartheta-4):(\vartheta^2-2)^2.\end{aligned}$$

Multipliziert man (110) mit $\sigma^{12}+8$, so ergibt die Reduktion des linksstehenden Quadrates durch (111)

$$(113)\qquad [(2a^2-2b-\zeta^3-1)\sigma^{12}+4(ab+1)\sigma^6-8(a+\zeta^3+5)]^2.$$

Es ist aber nach (75) und (84)

$$(114)\quad D(\zeta)=-2^4(\vartheta^2-4\vartheta+6)^2(11\vartheta^4-8\vartheta^3-12\vartheta^2+16\vartheta+12):(\vartheta^2-2)^4.$$

Der im Quadrat eingehende Faktor ist auch in (113) enthalten und fällt daher aus der Gleichung heraus:

$$\begin{aligned}(115)\qquad &(-11\vartheta^4+8\vartheta^3+12\vartheta^2-16\vartheta-12)(u^4-4)\\ &\qquad=[(3\vartheta^2+4\vartheta+2)u^2+r(\vartheta)u+4(\vartheta^2-2\vartheta-2)]^2.\end{aligned}$$

Als Lösung von

(116) $$-m(u^2+2)(u^2-2) = \text{Quadrat}$$

im Klassenkörper von $D=-m$ *erhält man daher*

(117) $$u = -\frac{(\vartheta^2-2)(7\vartheta^2+8\vartheta+2)}{(\vartheta^2-2\vartheta-2)^2+4\vartheta^2(\vartheta+1)^2}.$$

Die rationale Funktion vierten Grades ist aus zwei quadratischen

(118) $$u = \frac{\tau^2+2\tau-1}{\tau^2+1}, \qquad \tau = \frac{-\vartheta^2+2\vartheta+2}{2\vartheta(\vartheta+1)}$$

zusammengesetzt und zwar löst die erste die diophantische Gleichung

(119) $$-u^2+2 = \text{Quadrat},$$

so daß (116) übergeht in

(120) $$m(\tau^2+2\tau+3)(3\tau^2-2\tau+1) = \text{Quadrat}.$$

Weiterhin löst die zweite

(121) $$\tau^2+2\tau+3 = \text{Quadrat},$$

so daß (116) übergeht in

(122) $$m(11\vartheta^4-8\vartheta^3-12\vartheta^2+16\vartheta+12) = \text{Quadrat}.$$

Für den einfachsten Fall $m=11$ lassen sich auch die anderen elliptischen Gebilde leicht behandeln. Die Gleichung für $\sigma(i\sqrt{11})$ wurde bereits in Abschn. 1 (20) abgeleitet. Setzt man

(123) $$\tfrac{1}{2}\sigma^3(i\sqrt{11}) = u, \qquad \tfrac{1}{2}\sigma^4(i\sqrt{11}) = z,$$

so besteht

(124) $$z^3 = 2u^4, \qquad u\cdot\sigma(i\sqrt{11}) = z = u+1, \qquad u^3-u^2-u-1 = 0.$$

Das in den letzten Abschnitten verwendete σ ist durch $\sqrt{2}:\sigma(i\sqrt{11})$ gegeben. Die Größe z in (93) stimmt daher mit der von (123) überein und nach (76) ist $\zeta=-2$. Die Spezialisierung von (93) ergibt also

(125) $$11(z^3+1) = (4z^2-6z+1)^2.$$

Aus (124) ergibt sich sofort die Identität

(126) $$11(2u^4+1) \equiv (4u^2+2u-1)^2+2(3u-5)(u^3-u^2-u-1)$$

und daraus die Grundlösung für das elliptische Gebilde (35), $c=-2$

(127) $$2\cdot 5^4+3^4 = 11^3.$$

Als zweites Beispiel wählen wir das elliptische Gebilde (37a) $c=4$. Alsdann ist

(128) $$w = \sigma^4(i\sqrt{11}) - \frac{4}{\sigma^4(i\sqrt{11})} = 2(u+1)-(u-1)^2$$

und aus (110) und (87) ergeben sich für $\zeta = -2$ die Relationen

$$(129)\quad \begin{aligned} &(a)\quad 11w(w^2+12) = 2^2(u+2)^2(u+4)^2 \\ &(b)\quad 11w \qquad\quad = (u+2)^2(3u+1)^2/u^4 \end{aligned}$$

und daraus durch Division und Wurzelziehung

$$(130)\qquad \sqrt{w^2+12} = 2u^2(u+4)/(3u+1) = u^2+2u-1.$$

Bereits die Lösung im Klassenkörper von $D=-44$ geht aus einer quadratischen Transformation hervor. Aus (128) und (130) erhält man geradezu

$$(131)\qquad w+\sqrt{w^2+12} = 6u \quad \text{oder} \quad w = \frac{3u^2-1}{u}$$

und vermöge (129b) die Identität

$$(132)\quad 11u(3u^2-1) \equiv (2u^2+u+5)^2 - (4u-25)(u^3-u^2-u-1).$$

Daraus ergibt sich die Grundlösung

$$(133)\qquad 3\cdot 5^4 - 2^4 = 11\cdot 13^2.$$

8. Nochmals reduzierbare Integrale.

Die vorstehenden Abschnitte lassen eine Anwendung auf die Reduzierbarkeit der Integrale des algebraischen Gebildes

$$(134)\qquad -m\cdot D(\alpha,\beta) = \text{Quadrat}$$

zu. Nach (75) und (114) ist das Gebilde auch durch die simultanen Gleichungen

$$(135)\qquad \begin{aligned} (\vartheta-2)(\vartheta^2-2) &= \text{Kubus} \\ m(11\vartheta^4 - 8\vartheta^3 - 12\vartheta^2 + 16\vartheta + 12) &= \text{Quadrat} \end{aligned}$$

definiert und hat das Geschlecht $g=7$. In Abschn. 6 wurden in (82), (100), (107), (109) an dem Modulsystem vier Reduktionen auf elliptische Gebilde vom äquianharmonischen Fall abgeleitet, und drei Reduktionen gibt es für den harmonischen Fall. *Die zugehörigen diophantischen Gleichungen sind innerhalb des natürlichen Rationalitätsbereiches sämtlich untereinander verschieden.* Daraus folgt, daß die zugehörigen sieben Integrale erster Gattung linear unabhängig sind und daher diese Integrale des algebraischen Gebildes vollständig repräsentieren. Das algebraische Gebilde besitzt zwar unendlich viele reduzierbare Integrale, die Koeffizienten der reduzierenden algebraischen Funktionen liegen jedoch nur bei den sieben genannten Reduktionen im natürlichen Rationalitätsbereich. Vier von den sieben Reduktionen sind unmittelbar erkennbar. In (135) kann jede der simultanen Gleichungen für sich betrachtet werden. In (95) und (106) sind die Reduktionen vierten Grades des in (134) enthaltenen hyperelliptischen Gebildes angegeben. Die drei

restlichen Reduktionen liegen verborgener, wie die nähere Darlegung der Reduktion in (99) bis (101) zeigt.

Daß (135) in elliptische Gebilde vom harmonischen und äquianharmonischen Fall zerfällt, läßt sich auch aus dem zugehörigen GALOIS-System[13]) der 24. Stufe vom Index 288 und dem Geschlechte $g = 19$

$$x_1^4 + x_2^4 + x^4 = 0, \quad x_1 x_2 x = 2 \tag{136}$$

ableiten. Setzt man

$$x_1^4 = -\lambda x^4, \qquad x_2^4 = (\lambda - 1) x^4, \tag{137}$$

so besteht

$$\lambda (1 - \lambda) = 16 x^{-12}, \tag{138}$$

indem λ das Doppelverhältnis und x das Quadrat des SCHLAEFLIschen Moduls bedeutet. Von diesem algebraischen Gebilde wurde in Abschn. 2 gezeigt, daß es in elliptische Gebilde vom harmonischen und äquianharmonischen Fall zerfällt. Die rechte Seite in (138) bleibt eine zwölfte Potenz, wenn links durch $(-\lambda)^3$ oder $(\lambda - 1)^3$ dividiert wird, und es ist (138) auf dreifache Weise in (136) enthalten. Wird mit $(-\lambda)^3$ multipliziert, so erhält man ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $g = 4$

$$\lambda^4 (\lambda - 1) = 16 y^{12}, \tag{139}$$

das durch $\lambda = 2y^3/\mu$ in

$$\mu (\mu^4 + 1) = 2 y^3 \tag{140}$$

übergeht. Da links das Oktaederpolynom sechsten Grades steht, zeigt man leicht, daß (140) in elliptische Gebilde vom äquianharmonischen Fall zerfällt[14]). Da wesentlich neue Gebilde auf diesem Wege nicht erhalten werden, folgt, daß das GALOIS-System (136) in elliptische Gebilde vom harmonischen und äquianharmonischen Fall zerfällt. Die genauere Analyse ergibt die Zerlegung in 9 bzw. 10 unabhängige Integrale der genannten Art.

9. Imaginär-quadratischer Körper von der Klassenzahl eins.

In Abschn. 5 wurde bereits festgestellt, daß α, β, ζ für die singulären Werte ganzzahlig sind. Für den Fall der Klassenzahl eins sind diese Werte durch rationale ganze Zahlen gegeben und insbesondere folgt aus (71) und (72), daß β und ζ gerade sind. Daß die Gleichung (72) nur

[13]) Hierzu R. FRICKE, elliptische Funktionen, Bd. 2, S. 532.

[14]) Unter den Integralen erster Gattung befindet sich auch das H. A. SCHWARZsche Integral

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt[3]{\mu (\mu^4 + 1)}},$$

das die konforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Oktaeders auf die Vollkugel leistet.

endlich viele ganzzahlige Lösungen haben kann, ergibt sich aus allgemeinen Sätzen der diophantischen Analysis. Im vorliegenden Falle läßt sich indessen auf elementarem Wege zeigen, daß (72) keine anderen ganzzahligen Lösungen besitzt als die in der Tabelle (76) aufgeführten, und es folgt daraus, daß *andere imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl eins als die seit langer Zeit bekannten nicht existieren.*

Nach (72) ist also zu zeigen, daß

$$2x(x^3+1) = \text{Quadrat} \tag{141}$$

außer $x = 0, -1, 1, 2$ *keine ganzzahligen Lösungen hat.* Die Annahme $2|x| = \text{Quadrat}$ führt auf

$$|x|^3 - y^2 = \pm 1. \tag{142}$$

Außer $x=2$, $y=3$ gibt es kein Zahlenpaar, die einen Kubus und ein Quadrat ergeben, die sich um eine Einheit unterscheiden, was seit langem bekannt sein dürfte. Das untere Vorzeichen führt auf die von Euler untersuchte Gleichung (57), $n=1$, das obere Vorzeichen auf (79). Die zweite Möglichkeit $|x| = \text{Quadrat}$ führt auf

$$z^6 \pm 1 = 2w^2. \tag{143}$$

Daß ein zweifaches Quadrat um eins vermehrt niemals einen Kubus ergibt, ist leicht einzusehen. Für das obere Zeichen zerfällt (143) eindeutig in

$$2(z^2+1) = \text{Quadrat} \tag{144}$$

$$z^4 - z^2 + 1 = \text{Quadrat}. \tag{145}$$

Außer $z = 0, \pm 1$ hat (145) keine ganzzahligen Lösungen. Denn es gilt bei ganzzahligen u und v

$$\pm(z^2+\varepsilon) = (u+\varepsilon v)^2, \qquad \varepsilon^3 = 1. \tag{146}$$

Die Auftrennung in reelle Gleichungen ergibt

$$(2u-v)v = \pm 1, \qquad u^2 - v^2 = \pm z^2. \tag{147}$$

Das Gleichungssystem hat nur diese Lösungen:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 1, \quad z = \pm 1 \\ u &= 1, \quad v = 1, \quad z = 0. \end{aligned} \tag{148}$$

Hiermit ist der Satz in (141) bewiesen.

10. Berechnung der Klasseninvarianten.

Das Ergebnis des vorigen Abschnittes läßt sich zur Berechnung der Klasseninvarianten $j(\omega)$ verwenden. Indem die Beziehung (72) unter α und β nur sechs Lösungen in ganzen Zahlen zuläßt, andrerseits sechs singuläre Werte existieren, für die α und β ganze rationale Zahlen an-

nehmen, bedarf es bei der Berechnung nur der Verteilung der Lösungen vermittels der Diskriminante $D(\alpha, \beta)$. Indem man das von H. Weber induktiv gefundene Ergebnis über $\sigma(i\sqrt{m})$, $m = 3 \pmod 8$ hinzunimmt, gelangt man nicht nur zu einer zahlenmäßig noch einfacheren Bestimmung von m, sondern auch zu einer algebraischen Beziehung vom Geschlechte $g = 9$, die es ermöglicht, Klasseninvarianten zu ermitteln, bei denen die Klassenzahl größer als eins ist. Die zunächstliegende Aufgabe, bei der $j(\omega)$ durch eine einzige Quadratwurzel ausgedrückt werden kann, erwähnt H. Weber am Ende des 20. Abschnittes seiner Algebra, III. Im folgenden teile ich die Lösung mit. Die Verwendung des von H. Weber nur induktiv erkannten Ergebnisses wird Entschuldigung finden, wenn ich nochmals versichere, daß es sich um ein Einzelergebnis der oben erwähnten Theorie in zwei Veränderlichen handelt.

Aus (70) erhalten wir zunächst für $\sigma^2(i\sqrt{m}) = 2/\sigma^2$

$$\sigma^6(i\sqrt{m}) - 2\beta\,\sigma^4(i\sqrt{m}) - 4\alpha\,\sigma^2(i\sqrt{m}) - 4 = 0. \tag{149}$$

Wird nunmehr für $\sigma(i\sqrt{m})$ eine kubische Gleichung angesetzt:

$$\sigma^3(i\sqrt{m}) - 2\gamma\,\sigma^2(i\sqrt{m}) - 2\delta\,\sigma(i\sqrt{m}) - 2 = 0, \tag{150}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2(\gamma^2 + \delta) &= \beta, \\ 2\gamma - \delta^2 &= \alpha. \end{aligned} \tag{151}$$

Die Elimination von β und γ führt auf die Gleichung

$$(-3\alpha^2 + 2\alpha\,\delta^2 + \delta^4 + 4\delta)^2 = 8(\alpha^4 + \alpha). \tag{152}$$

Die Parameter α, β, γ, δ bilden ein Modulsystem der 48. Stufe. Das darin enthaltene Modulsystem der 16. Stufe ist dadurch definiert, daß in der Potenzengleichung

$$\sigma_1^8 + \sigma_2^8 + \sigma_3^8 = 0 \tag{153}$$

die symmetrischen Grundfunktionen von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ eingeführt werden. Das hervorgehende hyperelliptische Gebilde läßt sich aus (152) herleiten, wenn

$$\alpha = x\,\delta^2 \tag{154}$$

substituiert wird:

$$[(-3x^2 + 2x + 1)\,\delta^3 + 4]^2 = 8(x^4\,\delta^6 + x) \tag{155}$$

und nach δ^3 ausgerechnet wird:

$$\delta^3 = \frac{-2(x-2)}{(x-1)(3x+1) \pm \sqrt{\frac{1}{2}x(x+1)^4 - 4x^3}}. \tag{156}$$

Das so erhaltene hyperelliptische Gebilde mit dem Verzweigungspolynom

$$P = x(x+1)^4 - 8x^3 \tag{157}$$

wird in sich transformiert durch

$$x' = x^{-1} \tag{158}$$

und zerfällt daher in zwei elliptische Gebilde, indem

$$\frac{(x+1)^2}{2x} = y \tag{159}$$

unmittelbar auf die Fermat-Lagrange-Gleichung

$$\sqrt{y\,(y^2-2)} \tag{160}$$

zurückführt. Das zweite Gebilde

$$\sqrt{(y-2)\,(y^2-2)} \tag{161}$$

besitzt gleichfalls komplexe Multiplikation, und zwar in $i\,|\,2$. Als diophantische Gleichung ist (161) von Th. Pepin behandelt worden. Beide Gleichungen (160) und (161) sind einbasig, so daß das durch (157) definierte Gebilde vom Geschlechte $g=2$ für die Gesamtheit aller Lösungspaare, die bezüglich des natürlichen Rationalitätsbereiches zueinander konjugierte Werte eines quadratischen Zahlkörpers aufweisen, zweibasig ist. Die Basen wird man unter den rationalen Lösungen suchen. Die Vervollständigung der Tabelle (76) ergibt

(162)

m	α	γ	δ	x
11	1	1	-1	1
19	-1	0	1	-1
43	2	1	0	∞
67	1	1	1	1
163	2	3	-2	1/2.

Der Wert $x=1/2$ wird durch (158) in $x=2$ transformiert und (156), (154) ergibt $\delta=0$, $\alpha=0$, $m=3$. Zu $m=3$ gehört auch $x=0$, nur fällt $\delta=-\sqrt[3]{4}$ nicht mehr rational aus[15]). Wählt man $x=\infty$ zur unteren Grenze, die anderen Werte zur oberen Grenze der Integrale erster Gattung, so müssen unter den Integralwerten Relationen bestehen, wenn das Gebilde zweibasig sein soll. Die Umformung von (157)

$$(3x^2+1)^2+(x^2-1)^2\,(2x-1)=2P \tag{163}$$

bestätigt dies und man kann $x=\pm 1$ als Basislösungen wählen.

Vermittels des Additionstheorems, das man in der Weise handhaben kann, wie es Euler für diophantische Untersuchungen an elliptischen Gebilden angewendet hat, lassen sich die einfachsten quadratischen Polynome bestimmen, die die oben erwähnten Lösungspaare darstellen.

[15]) Bei $x=-1$ führt das andere Vorzeichen in (156) auf $\gamma=0$, $\delta=\sqrt[3]{3}$, $m=27$.

Zunächst ergeben sich die bezüglich (158) invarianten Umformungen von (157)

$$\begin{aligned} &2x^2(x-1)^2 + x(x+1)^2(x^2+1) = P \\ &2x^2(x+1)^2 + x(x-1)^2(x^2+4x+1) = P. \end{aligned} \tag{164}$$

Die Wurzeln der quadratischen Polynome

$$x = i, \qquad -2+\sqrt{3} \tag{165}$$

erzeugen singuläre Werte, wenn man in (156) das Vorzeichen so wählt, daß $x-2$ sich heraushebt. Man erhält

$$\delta = (1+i):\sqrt[3]{2} \quad \text{bzw.} \quad \delta = -(1+\sqrt{3}):\sqrt[3]{2}. \tag{166}$$

Für beide Wertsysteme ergibt die weitere Ausrechnung

$$\alpha = -\sqrt[3]{2}, \qquad \beta = \sqrt[3]{4}, \qquad \zeta = 0, \qquad m = 3. \tag{167}$$

Die einfachste bezüglich (158) variante Umformung von (157) ist

$$8x^2 + x(x^2-1)(x^2+4x-1) = P. \tag{168}$$

Wählt man wiederum das Vorzeichen in (156) so, daß $x-2$ sich heraushebt, so erhält man

$$\begin{aligned} &x = -2+\sqrt{5}, \qquad \delta = -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \\ &\gamma = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \beta = 2 \end{aligned} \tag{169}$$

und diese Werte stimmen mit den Angaben H. Webers bezüglich $m = 35$ überein. Der reziproke Wert von x erzeugt sogar für beide Vorzeichen einen singulären Wert. Erstens ergibt $x = 2+\sqrt{5}$

$$m = 75, \quad \delta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt{5}, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt[3]{5}, \quad \gamma = \sqrt[3]{5}. \tag{170}$$

Indem δ eine Kubikwurzel enthält, kommt nur ein $m \equiv 0 \pmod 3$ in Frage, wodurch m eindeutig bestimmt ist. Zweitens hat man

$$m = 115, \quad \delta = -\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \quad \gamma = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}). \tag{171}$$

Dies ergibt für $\sigma(i\sqrt{115})$ nach (150) die Gleichung

$$(\sigma-1)^3 + \sigma(\sigma-1)\sqrt{5} - 1 = 0. \tag{172}$$

In $\sigma - 1$ ist diese Gleichung zu ihrer reziproken konjugiert und die Diskriminante hat den rationalen Wert -92. In dieser Weise kann man fortfahren. Aus der Gaussschen Tabelle ergeben sich folgende Fälle:

(173)	$m \not\equiv 0 \pmod 3$:	35,	91,	115,	187,	235,	403,	427
	Klassenkörper:	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{13}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{17}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{13}$,	$\sqrt{61}$
(174)	$m \equiv 0 \pmod 3$:	51,	75,	99,	123,	147,	267	
	Klassenkörper:	$\sqrt{17}$,	$\sqrt{5}$,	$\sqrt{33}$,	$\sqrt{41}$,	$\sqrt{21}$,	$\sqrt{89}$.	

Zur Ermittlung der singulären Werte dient das Kriterium, daß δ einen ganzzahligen Wert annehmen muß. In den Fällen (173) gehört δ dem Klassenkörper selbst an. Hingegen ist δ in den Fällen (174) durch eine Kubikwurzel gegeben, die aber bei Vorzeichenwechsel der Quadratwurzel denselben kubischen Körper definiert.

Im Falle $m = 147$ tritt die Besonderheit ein, daß x rational ausfällt, und der Klassenkörper durch die Quadratwurzel des hyperelliptischen Gebildes erzeugt wird:

$$(175)\quad m = 147, \quad 3x + 1 = 0, \quad \delta = \sqrt{3}\sqrt[6]{7}, \quad \alpha = -\sqrt[3]{7}, \quad \gamma = \sqrt[3]{7},$$

$$(176)\quad \sigma(i\,7\sqrt{3}) = \tfrac{1}{3}\left[2\sqrt[3]{7} + \sqrt[6]{\tfrac{7}{4}}\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right) + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\left(5 + \sqrt{21}\right)\right].$$

Die Ermittlung gelang aus der Schlaeflischen Modulargleichung für den siebenten Transformationsgrad

$$(177)\quad \sigma^8 + \tau^8 - \sigma\tau\left(\sigma^6\tau^6 - 7\sigma^3\tau^3 + 8\right) = 0.$$

Setzt man

$$(178)\quad \sigma = \sqrt[3]{2}\,\varrho, \qquad \tau = \sqrt[3]{2},$$

so geht (177) über in

$$(179)\quad \begin{aligned} &\varrho^8 - 4\varrho^7 + 7\varrho^4 - 2\varrho + 1 \\ &\equiv (\varrho^2 + \varrho + 1)\left(\varrho^6 - 5\varrho^5 + 4\varrho^4 + \varrho^3 + 2\varrho^2 - 3\varrho + 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Der Restfaktor sechsten Grades zerfällt im Klassenkörper $\sqrt{21}$:

$$(180)\quad \varrho^3 - \tfrac{5}{2}\varrho^2 + \tfrac{3}{2}\varrho - 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{21}\,\varrho\,(\varrho - 1)$$

und ϱ ist durch (178) mit σ in (176) verbunden.

Zur weiteren Berechnung dienen folgende Umformungen von (157)

$$(181)\quad \begin{aligned} &\sqrt{13}, && (x^3 - x^2 - x - 3)^2 - (x^4 - 1)(x^2 - 4x - 9) = 2P \\ &\sqrt{17}, && 2(x+1)^2 + (x^2+1)(x-1)(x^2 + 5x + 2) = P \\ &\sqrt{33}, && 2(x^2 + x + 2)^2 + (x^2+1)(x+1)(x^2 + x - 8) = P \\ &\sqrt{41}, && (5x^2 + 4x - 5)^2 + (x^2 - 1)(2x - 1)(x^2 - 8x - 25) = 2P \\ &\sqrt{61}, && 2(3x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)(x - 2)(x^2 - 12x - 25) = P \\ &\sqrt{89}, && x^2(5x+1)^2 + x(x+1)(2x-1)(x^2 - 9x - 2) = 2P. \end{aligned}$$

Der Fall $\sqrt{13}$ führt nur auf einen ganzzahligen Wert für δ, der $m = 91$ angehört. Indessen enthält die Tabelle noch $m = 403$. Ebenso steht noch $m = 235$ mit dem Klassenkörper $\sqrt{5}$ aus. Die zugehörigen Lösungspaare lassen sich aus der Duplikatur des Integrals der Grundlösung von (160) als auch (161) herleiten. Für beide Gleichungen ist die Duplikatur durch $x = 2$, $y = 9/4$ gegeben. Indem man die rationale Periodenhalbierung von (161) und (160) heranzieht und den Integralwert um diesen

Wert vermehrt, gelangt man zu Lösungen, die die gewünschten Lösungspaare liefern.

$$\text{(182)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ y' = \frac{2(y-1)}{y-2} = 10, \qquad x^2 - 18x + 1 = 0, \qquad \sqrt{5} \\ &\text{(b)}\ y' = -\frac{2}{y} = -\frac{8}{9}, \qquad 9x^2 + 34x + 9 = 0, \qquad \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Hiermit ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Die Ausrechnung von (182a) und (181), $\sqrt{17}$ füge ich noch bei.

$$\text{(183)}\quad m = 235, \qquad x = 9 + 4\sqrt{5}; \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

$$\text{(184)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ m = 187, \qquad x = \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{17}), \qquad \delta = -\tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \\ &\text{(b)}\ m = 51, \qquad x^{-1} = \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{17}), \qquad \delta^3 = \tfrac{1}{2}(-11 + 3\sqrt{17}). \end{aligned}$$

Um das Resultat für $m = 51$ mit dem von H. Weber zu identifizieren, berechnet man

$$\text{(185)}\quad \delta = \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{17})\sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}, \qquad \gamma = \sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}$$

und setzt

$$\text{(186)}\quad \sigma^3\left(i\sqrt{51}\right) = 2z, \qquad z^3 + cz^2 + dz - 1 = 0$$

und benutzt ähnliche Formeln wie in (112)

$$\text{(187)}\quad \begin{aligned} c &= -4\gamma^3 - 6\gamma\delta - 3 = -4 + \sqrt{17} \\ d &= -2\delta^3 + 6\gamma\delta + 3 = -1. \end{aligned}$$

An dem algebraischen Gebilde (152) lassen sich ungewöhnliche Eigenschaften nachweisen. Das Gebilde besitzt nach (162) sechs ganzzahlige rationale Lösungen, nach (173) sieben Lösungspaare mit ganzzahligen Werten und 14 Lösungstripel mit ganzzahligen Werten, nämlich für

$$\text{(188)}\quad \begin{aligned} m = 59,\ 83,\ 107,\ 139,\ 211,\ 283,\ 307,\ 331,\ 379,\ 499,\ 547, \\ 643,\ 883,\ 907 \end{aligned}$$

usw. Ferner habe ich bewiesen, daß das algebraische Gebilde vollständig in elliptische Gebilde mit komplexer Multiplikation in i, $i\sqrt{2}$, $i\sqrt{3}$, $i\sqrt{6}$ zerfällt, und zwar ist die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung beziehungsweise 3, 1, 3, 2.

Die vorliegende Untersuchung behandelt nur elliptische Gebilde, bei denen komplexe Multiplikation auftritt. Die arithmetische Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels führt bereits zu einem allgemeineren Resultat. Indem man zu ersten „Vollständigkeitssätzen" über Erzeugung der algebraischen Gebilde und Rationalitätsbereiche gelangt, rührt dies Ergebnis an das tiefstliegende Geheimnis der Theorie der algebraischen Funktionen.

(Eingegangen am 20. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 254—257 (1952).

A Note on Entire Functions of Perfectly Regular Growth.

By

S. M. Shah in Aligarh (India).

1. If $f(z)$ be an entire function of order ϱ and if $\log M(r) \sim T r^{\varrho}$ $(0 < T < \infty)$ then [1, pp. 10–11] $\nu(r) \sim \varrho T r^{\varrho}$ and conversely. Here $\nu(r)$ denotes the rank of the maximum term of $f(z)$ for $|z| = r$. Let $L(r)$ be a "slowly changing" function; that is $L(r) > 0$ and continuous for $r > r_0$ and $L(c r) \sim L(r)$ as $r \to \infty$, for every constant $c > 0$. In this note I compare $\log M(r)$ with a more general function $r^{\varrho} L(r)$ and obtain a result which includes the above as a special case.

In a recent paper [2, Th. 3] S. K. Bose proved that if $M^{(s)}(r) = \operatorname{Max}_{|z|=r} |f^{(s)}(z)|$ and if $\varrho < \frac{1}{2}$ then

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log M^{(s)}(r)}{\nu(r) \log r} \leq \limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{\nu(r) \log r} \leq 1. \tag{1}$$

In § 3 I discuss to what extent it is possible to improve (1).

2. When $0 < \varrho < \infty$, let

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M(r)}{r^{\varrho} L(r)} = \left\{ \begin{matrix} T \\ t \end{matrix} \right.; \qquad \lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \delta \end{matrix} \right..$$

Theorem. (i) *If* $0 < t \leq T < \infty$ *then* $0 < \delta \leq \gamma < \infty$ *and conversely.*

(ii) *If* (i) *holds then*

$$\frac{1}{\varrho k} < \lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M(r)}{\nu(r)} < \frac{k}{\varrho} \tag{2}$$

where $x = k$ *is that root of the equation* $e T \log x = x t - e T$ *which lies in the interval* (e, ∞).

(iii) *If* $\log M(r) \sim T r^{\varrho} L(r)$ $(0 < T < \infty)$ *then* $\nu(r) \sim \varrho T r^{\varrho} L(r)$ *and conversely.*

Proof. (i) If $a \geq 1$, $\gamma < \infty$ then

$$\begin{aligned} \log M(r a^{1/\varrho}) &\sim O(1) + \left(\int_{r_0}^{r} + \int_{r}^{r a^{1/\varrho}} \right) \frac{\nu(t)}{t} dt \\ &< O(1) + (\gamma + \varepsilon) \int_{r_0}^{r} x^{\varrho - 1} L(x) \, dx + \frac{\nu(r a^{1/\varrho}) \log a}{\varrho} \\ &\sim (\gamma + \varepsilon) \frac{r^{\varrho}}{\varrho} L(r) + \frac{\nu(r a^{1/\varrho}) \log a}{\varrho} \text{ [1]}. \end{aligned}$$

[1] See [3] Lemma 5.

Hence [4, p. 221]

$$\varrho\, a\, T \leq \gamma + \gamma\, a \log a; \qquad \varrho\, a\, t \leq \gamma + \delta\, a \log a \tag{3}$$

which hold also when $\gamma = \infty$. Similarly we get

$$\varrho\, a\, T \geq \delta + \gamma \log a; \qquad \varrho\, a\, t \geq \delta\,(1 + \log a). \tag{4}$$

Suppose now $0 < t \leq T < \infty$. From (4) we get $\gamma < \infty$. Further $\delta > 0$. For if $\delta = 0$ we get from (3) $t \leq \gamma/\varrho\, a$ and since a is arbitrary it follows that $t = 0$. Hence we have a contradiction and so $\delta > 0$.

If $0 < \delta \leq \gamma < \infty$ then we have from (3) $T < \infty$ and from (4) $t > 0$.

(ii) Take $a = \exp((\gamma - \delta)/\gamma)$ in (4). Then

$$\gamma \leq \varrho\, T \exp\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) < \varrho\, T\, e$$

and hence from (3) $\varrho\, a\, t < \varrho\, T\, e + \delta a \log a$. Consider now the equation $e\, T \log x = x\, t - e\, T$. It has one and only one root in the interval (e, ∞). Let it be k. Then taking $a = k$ we get

$$\varrho\,(k\, t - T\, e) < \delta\, k \log k$$

or

$$\varrho\, T\, e \log k < \delta k \log k, \qquad \delta > \frac{\varrho\, e\, T}{k}.$$

Further, since $f(z)$ is of finite order,

$$\log M^{(s)}(r) \sim \log M(r) \tag{5}$$

and hence

$$\frac{1}{\varrho\, k} < \frac{\delta}{\gamma\, \varrho} \leq \lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M(r)}{\nu(r)} = \lim_{r \to \infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log M^{(s)}(r)}{\nu(r)} \leq \frac{\gamma}{\delta\, \varrho} < \frac{k}{\varrho}. \tag{6}$$

(iii) From (3) and (4) we get $\delta \leq \varrho\, T \leq \gamma$, $\delta \leq \varrho\, t \leq \gamma$ and hence if $\delta = \gamma$, $T = t = \gamma/\varrho$. Suppose now $T = t$, which we may take, without loss of generality, to be unity. We shall show that $\gamma = \delta$. If $0 < \eta < 1$,

$$\log M(r) \sim I(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\nu(t)}{t}\, dt$$

$$\frac{\nu(r)\, \eta\, r}{r + \eta\, r} < \int_{r}^{r + \eta r} \frac{\nu(t)}{t}\, dt = I(r + \eta\, r) - I(r)$$

$$= (r + \eta\, r)^{\varrho} L(r + \eta\, r) - r^{\varrho} L(r) + o(r^{\varrho} L(r)).$$

Hence

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} \leq \varrho(1 + \eta) + H\, \eta(1 + \eta)$$

where H is a constant. Since η is arbitrary we get

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} \leq \varrho.$$

By considering the integral $I(r)-I(r-\eta r)$ we get

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{r^{\varrho} L(r)} \geq \varrho$$

and hence

$$\nu(r) \sim \varrho\, r^{\varrho} L(r).$$

Remark. We can similarly prove the following:

(a) *If* $\gamma=0$ *then* $T=0$ *and conversely.*

(b) *If* $\delta=\infty$ *then* $t=\infty$.

(c) *If* $t=\infty$ *then* $\gamma=\infty$ *but* δ *may not be infinite.*

(See Example 1 below.)

(d) *If* $\delta=0$, $\gamma<\infty$ *then* $t=0$.

(e) *If* $t=0$ *then* $\delta=0$.

Example 1. Let

$$n_1=(10!)!, \quad n_{s+1}=n_s^4 \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

$$R_n=\begin{cases} \dfrac{n_1}{\log\log n_1}\dfrac{1}{n_1+1-n} & \text{for} \quad 1\leq n<n_1 \\ \dfrac{n}{\log\log n} & \text{for} \quad n_s\leq n<\left[\dfrac{n_s^4}{\log n_s}\right] \\ 2\left[\dfrac{n_s^4}{\log n_s}\right]-\dfrac{1}{n!} & \text{for} \quad \left[\dfrac{n_s^4}{\log n_s}\right]\leq n<n_{s+1}, \end{cases}$$

$$f(z)=\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{R_1 R_2 \ldots R_n}.$$

Then $f(z)$ is an entire function of order one for which $\gamma=\infty$, $\delta=\frac{1}{2}$, $t=T=\infty$ with respect to the comparison function r. If we take the comparison function $r\log\log r$ then $\gamma=1$, $\delta=0=t$.

3. If $f(z)$ be of any order $\varrho<\infty$ then from (5)

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M^{(s)}(r)}{\nu(r)\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\nu(r)\log r} \leq 1. \tag{7}$$

We cannot replace unity on the right hand side of (7) by any[2]) constant $c<1$, unless we impose some condition on $f(z)$. If, for instance, $f(z)$ is of very regular growth (with respect to the comparison function $r^{\varrho}L(r)$) then we have relation (6).

For functions of infinite order no result of type (1) holds. In fact given any increasing function $\Phi(x)\to\infty$ we can construct a function of infinite order for which[3])

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M^{(s)}(r)}{\Phi(r\,\nu(r))} = \infty.$$

[2]) See [5] Theorem 2.

[3]) See [5] Theorem 3 and [6] p. 35 inequality (2.13).

References.

[1] Pólya, G., u. G. Szegö.
Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II. Berlin 1925.

[2] Bose, S. K.
On the Maximum Modulus of an Integral Function. Bull. Calcutta Math. Soc. **43**, 25—26 (1951).

[3] Hardy, G. H., and W. W. Rogosinki.
Notes on Fourier Series (III). Quart. J. of Math. (Oxford series) **16**, 49—58 (1945).

[4] Shah, S. M.
The Maximum Term of an Entire Series (III). Quart. J. of Math. (Oxford series) **19**, 220—223 (1948).

[5] Shah, S. M.
The Maximum Term of an Entire Series (VI). J. Indian Math. Soc. **14**, 21—28 (1950).

[6] Valiron, G.
Lectures on the General Theory of Integral Functions. Toulouse 1923.

(Eingegangen am 25. Oktober 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 258—260 (1952).

Über additive Zerlegungen in lauter verschiedene Glieder einer Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe.

Von

Roland Sprague in Berlin.

Herr Richert[1]) hat in Anwendung eines allgemeineren Satzes unter anderem die additive Zerlegbarkeit aller natürlichen Zahlen oberhalb 33 in lauter verschiedene Dreieckszahlen bewiesen. Hier wird auf dasselbe Beispiel ein anderes Verfahren angewandt, das schneller zum Ziel führt, und dann eine Verallgemeinerung gezeigt.

Es sei $m_1, m_2, \ldots$ eine unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe, n eine natürliche Zahl. Gibt es zu n die Zahlen m_x und n' mit

$$\text{(A)} \qquad m_{x-1} \leqq \frac{n}{2} < m_x \leqq n = m_x + n', \quad x \geqq 1, (m_0 = 0),$$

so heiße n' der (eindeutig bestimmte) „Nachfolger" von n, und n ein „Vorgänger" von n'.

Für die aus n und den sukzessiven Nachfolgern gebildete „Kette" $n = n^{(0)}, n', n'', \ldots$ bestehen zwei Möglichkeiten:

I. Es gibt ein $n^{(\nu)}$ mit

$$n^{(\nu)} = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_\mu}, \qquad i_1 > i_2 > \cdots > i_\mu, \qquad \mu \geqq 1, \qquad \nu \geqq 0.$$

Dann hat man auch für n in

$$n = (n - n') + (n' - n'') + \cdots + (n^{(\nu-1)} - n^{(\nu)}) + m_{i_1} + \cdots + m_{i_\mu}$$

eine Zerlegung in lauter verschiedene m_k, da jedes der ersten ν Glieder rechts ein m_k ist und die Summe aller folgenden Glieder übertrifft.

II. Es gibt kein solches $n^{(\nu)}$. Die Kette endet mit einer Zahl $n^* > 0$, die wegen $2m_{y-1} \leqq n^* < m_y$ keinen Nachfolger hat.

Im Fall der Dreieckszahlen $m_k = \binom{k+1}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$, ist nur $n^* = 2$ möglich. Die Vorgänger von 2 sind $2 + 3 = 5$, $2 + 6 = 8$ und $2 + 10 = 12$; man erhält sie durch Addition eines der nächsthöheren m_k unter Beachtung von (A). Von den Vorgängern der Zahlen 5, 8, 12, nämlich 11, 15, 20 bzw. 18, 23 bzw. 27, 33 brauchen nur 23 und 33 betrachtet zu werden; die andern gehören wegen ihrer Zerlegbarkeit (s. unten) zu I. Dasselbe gilt aber auch für die Vorgänger von 23 und 33, nämlich 51, 59

[1]) Hans-Egon Richert, Über Zerlegungen in paarweise verschiedene Zahlen. Norsk mat. Tidsskr. **31**, 120—122 (1949).

bzw. 69, 78. Also trifft auf jede Kette $n, n', \ldots$ mit $n > 33$ der Fall I zu, d.h.: jedes $n > 33$ ist in lauter verschiedene Dreieckszahlen zerlegbar.

$$11 = 10 + 1 \qquad 20 = 10 + 6 + 3 + 1 \qquad 59 = 55 + 3 + 1$$
$$15 = 15 \qquad 27 = 21 + 6 \qquad 69 = 66 + 3$$
$$18 = 15 + 3 \qquad 51 = 45 + 6 \qquad 78 = 78;$$

man kommt so mit 9 (statt 45) Zerlegungen aus.

Das angegebene Verfahren vereinfacht die Anwendung des folgenden Satzes:

Es sei $m_1, m_2, \ldots$ eine unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe, $N \geqq -1$ eine ganze Zahl. Ferner sei ein $k \geqq 0$ vorhanden mit

$$(1) \qquad 2m_k - m_{k+1} \leqq N < m_{k+1} \quad (m_0 = 0)$$

$$(2) \qquad 2m_l - m_{l+1} > N \quad \textit{für alle} \quad l > k.$$

Sind dann die Zahlen $N+1, N+2, \ldots, N+m_{k+1}$ sämtlich darstellbar in der Form

$$(3) \qquad \sum_{\nu} a_\nu m_\nu \quad \textit{mit} \quad a_\nu = 0 \textit{ oder } 1,$$

so ist jede natürliche Zahl oberhalb N die Summe von paarweis verschiedenen Gliedern der Folge (m_ν).

Beweis. Unter Benutzung der bei (A) definierten Nachfolgerelation braucht nur noch gezeigt zu werden, daß aus $n > N + m_{k+1}$ a) die Existenz von n', b) $n' > N$ folgt.

a) Andernfalls wäre

$$m_{x-1} \leqq \frac{n}{2} < n < m_x \quad (x \geqq 1),$$

also

$$2m_{x-1} - m_x < 0$$

und wegen (2)

$$x \leqq k + 1;$$

das ergäbe

$$n < m_{k+1},$$

$$n \leqq N + m_{k+1}$$

gegen die Annahme über n.

b) Für $N = -1$ ist nichts zu beweisen; sei $N \geqq 0$. Aus $n > N + m_{k+1}$ und

$$m_{x-1} \leqq \frac{n}{2} < m_x$$

sowie, nach (1),

$$m_k \leqq \frac{N + m_{k+1}}{2} < m_{k+1} \leqq N + m_{k+1}$$

folgt

$$x \geqq k + 1.$$

Für $x = k+1$ ist

$$n' = n - m_x = n - m_{k+1} > N;$$

für $x > k+1$

$$n' = n - m_x \geqq 2m_{x-1} - m_x > N$$

gemäß (2); w. z. b. w.

Bemerkungen. $N = -1$ ist zugunsten der Folge $m_\nu = 2^{\nu-1}$ einbezogen. In Herrn Richerts Satz wird zu (3) noch $a_\nu = 0$ für alle $\nu > k$ verlangt, statt (2) dagegen nur

(2′) $$2m_l - m_{l+1} \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad l > k$$

$\left(\text{es genügt sogar } m_{k+1} + \sum_{k+1}^{l} m_\nu - m_{l+1} \geqq 0 \text{ für alle } l > k\right)$.

Bei den Quadratzahlen erfordert (2) eine längere Serie als (2′), bei den Dreiecks- und Fünfeckszahlen nicht. — Nach dem obigen Verfahren ergab sich die Zerlegbarkeit in lauter verschiedene $m_\nu = \binom{\nu+2}{3}$ für alle Zahlen oberhalb 558.

(Eingegangen am 2. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 261—270 (1952).

Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen.

Von

Claus Müller in Bonn.

Der mathematischen Behandlung elektromagnetischer Schwingungen liegt das System von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \nabla \times \mathfrak{H} + i\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{E} = 0; \qquad \nabla \times \mathfrak{E} - i\,\omega\,\mu\,\mathfrak{H} = 0 \qquad i = \sqrt{-1}$$

zugrunde, dessen Koeffizienten ε, μ und ω in dieser Arbeit positiv reell seien.

Wir betrachten ein reguläres einfach zusammenhängendes Gebiet G, das von einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche F berandet wird, und untersuchen die folgenden Fragestellungen:

I (Innenraumproblem). Gesucht ist ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, das im Inneren von G den MAXWELLschen Gleichungen (1) genügt, wobei die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ auf F vorgegebene Werte annehmen.

II (Außenraumproblem). Gesucht ist ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, das außerhalb G den MAXWELLschen Gleichungen (1) genügt und die Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{R\to\infty} R\,[\omega\,\varepsilon\,(\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}) - k\,\mathfrak{H}] = 0 \qquad |R\,\mathfrak{E}| \leq c$$

$$\lim_{R\to\infty} R\,[\omega\,\mu\,(\mathfrak{n}\times\mathfrak{H}) + k\,\mathfrak{E}] = 0 \qquad |R\,\mathfrak{H}| \leq c$$

erfüllt, wobei die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ auf F vorgegebene Werte annehmen.

In einer früheren Arbeit [6] gelang es, mit Hilfe der von mir aufgestellten Ausstrahlungsbedingungen die Eindeutigkeit des Außenraumproblems zu beweisen. (SAUNDERS folgerte die Eindeutigkeit später auf einem etwas modifizierten Wege [9].) Im Anschluß an den Existenzbeweis beim allgemeinen Beugungsproblem wurde als Grenzfall auch das Problem der vollkommenen Reflexion behandelt, das einen Spezialfall des hier untersuchten Außenraumproblems insofern darstellt, als nur solche Randwerte vorgeschrieben werden, die als Komponenten der elektrischen Feldstärke einfallender Felder auftreten. Diese Randwerte können auch dadurch gekennzeichnet werden, daß zu ihnen stets Lösungen des Innenraumproblems existieren.

In der vorliegenden Mitteilung gelingt mit den zur Lösung des Beugungsproblems benutzten Ansätzen auch die vollständige Behandlung der

genannten Randwertprobleme[1]). Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, die gesuchten Felder durch Flächenströme zu erzeugen. Als wesentliche Vereinfachung gegenüber dem Beugungsproblem ergibt sich hier, daß die gesuchten Felder im allgemeinen durch „magnetische Ströme" allein dargestellt werden können. Nur dann, wenn das von der Fläche F umschlossene Gebiet Eigenschwingungen zu der betrachteten Frequenz ω besitzt und das Innenraumproblem daher nicht allgemein lösbar wird, müssen zur Lösung des Außenraumproblems zusätzlich Felder benutzt werden, die durch „elektrische Ströme" erzeugt werden.

Die entsprechende Schwierigkeit bei den Randwertproblemen der Potentialtheorie wird für das Außenraumproblem bekanntlich mit Hilfe der sog. Kapazitätsmethode überwunden. Die Übertragung dieser Methode auf die skalare Wellengleichung wurde jüngst von H. Weyl unternommen [1]. Nach dem in einer früheren Mitteilung [10] gegebenen vereinfachten Verfahren wird dieser Vorgang nun auf die Randwertprobleme der elektromagnetischen Schwingungen angewandt. Diese charakteristische Methode der Theorie der Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen wird hier mit den laufend benutzten Ansätzen des Verf. in vollständiger Analogie auf die Randwertprobleme des Systems der Maxwellschen Gleichungen für zeitlich periodische Felder übertragen, so daß diese Ansätze nicht nur aus Gründen der physikalischen Anschaulichkeit, sondern auch wegen ihrer Einfachheit und Abgeschlossenheit für den vorliegenden Problemkreis als naturgemäß erscheinen dürften.

§ 1.

Die Felder von Flächenströmen.

Wir werden die zu bestimmenden Felder durch Flächenströme erzeugen. Bezeichnen wir durch (x) die Abhängigkeit von den Aufpunktskoordinaten und durch (ξ) die Abhängigkeit von den Quellpunktskoordinaten, so stellt (mit den Bezeichnungen der früheren Arbeiten [3, 6])

$$\mathfrak{E}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left[i\,\omega\,\mu\,\mathfrak{j}\,\varphi - \mathfrak{j}'\times\nabla\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\,\varrho\,\nabla\varphi\right] dF_\xi$$

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left[i\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{j}'\varphi + \mathfrak{j}\times\nabla\varphi + \frac{1}{\mu}\,\varrho'\nabla\varphi\right] dF_\xi \tag{1.1}$$

mit

$$\varphi = \varphi(x,\xi) = r^{-1}e^{ikr}; \qquad r^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2$$
$$\nabla_F\,\mathfrak{j} = i\,\omega\,\varrho; \qquad \nabla_F\,\mathfrak{j}' = i\,\omega\,\varrho'; \qquad k = \sqrt{\omega^2\,\varepsilon\,\mu} > 0 \tag{1.2}$$

eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen dar, die den Ausstrahlungs-

[1]) W. K. Saunders [2], der eine Art Greenschen Tensor konstruiert, um mit dessen Hilfe die Lösung des Außenraumproblems explizit anzugeben, läßt die wesentliche Frage, die Annahme der vorgegebenen Randwerte, unberührt.

bedingungen genügt. Es sei daran erinnert, daß $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ nur Komponenten in Richtung der Tangenten an F haben und V den bezüglich (ξ) angewandten ∇-Operator bezeichnet, während $\nabla_F \mathfrak{j}$ und $\nabla_F \mathfrak{j}'$ die Flächendivergenz von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ darstellen. Die Fläche F sei dreimal stetig differenzierbar. Sind die Belegungen oder „Ströme" $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ stetig differenzierbar und genügen ihre Ableitungen HÖLDER-Bedingungen, so können $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch die bekannten Grenzübergänge auf der inneren bzw. äußeren Normalen von innen bzw. außen stetig ergänzt werden. Wir bezeichnen diese Grenzwerte in verständlicher Schreibweise mit

$$\mathfrak{E}_i\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\}: \quad \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\}; \quad \mathfrak{H}_i\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\}; \quad \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\}. \tag{1.3}$$

Stellt $\mathfrak{n}$ die ins Äußere von G weisende Flächennormale dar, so ist auf Grund der Sprungrelationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} \times [\mathfrak{E}_i\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\} - \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\}] &= \mathfrak{j}' \\ \mathfrak{n} \times [\mathfrak{H}_i\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\} - \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'\}] &= -\mathfrak{j}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Das HUYGHENSsche Prinzip liefert in dieser Schreibweise, wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in dem von F umschlossenen Gebiet den MAXWELLschen Gleichungen genügen,

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{-\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i, \ \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\} &= \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i \\ \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{-\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i, \ \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\} &= \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Wir benötigen noch die für stetige $\mathfrak{f}(\xi)$ gültigen Beziehungen [3]

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}(x) \times \int\limits_{\substack{F_i \\ \rightarrow}} (\mathfrak{f} \times \nabla \varphi)\, dF_\xi &= -2\pi \mathfrak{f}(x) + \int\limits_F \mathfrak{n}(x) \times (\mathfrak{f}(\xi) \times \nabla \varphi)\, dF_\xi \\ \mathfrak{n}(x) \times \int\limits_{\substack{F_a \\ \rightarrow}} (\mathfrak{f} \times \nabla \varphi)\, dF_\xi &= 2\pi \mathfrak{f}(x) + \int\limits_F \mathfrak{n}(x) \times (\mathfrak{f}(\xi) \times \nabla \varphi)\, dF_\xi, \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei mit der hier benutzten Schreibweise gemeint ist, daß die Grenzwerte der Integrale zu bilden sind, wenn sich der Aufpunkt (x) auf der inneren bzw. äußeren Normalen der Fläche F nähert.

Wir betrachten nun die homogenen Integralgleichungen

$$\mathfrak{k}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_F \mathfrak{n}(x) \times (\mathfrak{k}(\xi) \times \nabla \varphi)\, dF_\xi \tag{1.7}$$

und

$$\mathfrak{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_F \mathfrak{n}(x) \times (\mathfrak{h}(\xi) \times \nabla \varphi)\, dF_\xi, \tag{1.8}$$

die wir symbolisch in der Form

$$(E + M)\,\mathfrak{k} = 0; \qquad (E - M)\,\mathfrak{h} = 0 \tag{1.9}$$

schreiben. Zur Diskussion der transponierten, konjugiert komplexen Gleichungen

$$\mathfrak{t}(E + \overline{M}) = 0; \qquad \mathfrak{s}(E - \overline{M}) = 0 \tag{1.10}$$

denken wir uns ein geeignetes System von Flächenkoordinaten eingeführt und setzen

$$\mathfrak{k}(x) = k^r(x)\,\mathfrak{x}_r(x); \qquad \mathfrak{t}(x) = t_j(x)\,\mathfrak{x}^j(x), \tag{1.11}$$

wo

$$\mathfrak{x}_r\,\mathfrak{x}^j = \delta_r^j \tag{1.12}$$

ist. In dieser Schreibweise lautet (1.7)

$$k^r(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \mathfrak{x}^r(x)\left[\mathfrak{n}(x)\times(\mathfrak{x}_j(\xi)\times\nabla\varphi)\right]k^j(\xi)\,dF_\xi, \tag{1.13}$$

so daß wir für das transponierte, konjugiert komplexe System

$$t_j(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \mathfrak{x}^r(\xi)\left[\mathfrak{n}(\xi)\times(\mathfrak{x}_j(x)\times\nabla'\overline{\varphi})\right]t_r(\xi)\,dF_\xi \tag{1.14}$$

erhalten. Hier bezeichnet ∇' die Anwendung des ∇-Operators bezüglich der Aufpunktskoordinaten (x), so daß

$$\nabla'\overline{\varphi} = -\nabla\overline{\varphi} \tag{1.15}$$

ist. Für (1.14) können wir daher

$$\mathfrak{t}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \nabla\overline{\varphi}\times\left(\mathfrak{n}(\xi)\times\mathfrak{t}(\xi)\right)dF_\xi \tag{1.16}$$

schreiben[2]). Entsprechend finden wir

$$\mathfrak{s}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_F \nabla\overline{\varphi}\times\left(\mathfrak{n}(\xi)\times\mathfrak{t}(\xi)\right)dF_\xi. \tag{1.17}$$

Setzen wir F als dreimal stetig differenzierbar voraus, so sind die Lösungen der Integralgleichungen (1.7), (1.8), (1.16) und (1.17) differenzierbar und ihre Ableitungen genügen HÖLDER-Bedingungen. Die Lösungsgesamtheiten der vier Gleichungen (1.9) und (1.10) bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ und erhalten

Lemma 1: *Für* $\mathfrak{k}\in\mathfrak{K}$, $\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}$, $\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}$ *gilt*

$$\mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{t}}\in\mathfrak{H}; \qquad \mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{s}}\in\mathfrak{K}; \qquad \mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{h}}\in\mathfrak{T}; \qquad \mathfrak{n}\times\overline{\mathfrak{k}}\in\mathfrak{S},$$

wobei die so vermittelten Abbildungen umkehrbar eindeutig sind.

Da $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}$ bekanntlich gleiche Dimension haben, folgt somit, daß auch $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ die gleiche Dimension besitzen.

[2]) Es sei hier auf ein Versehen des Vorzeichens in [3] S. 376, Formel (27) hingewiesen, die wie (1.16) dieser Note lauten muß. Die dadurch notwendige Modifikation der Lösung des Problems der vollkommenen Reflexion ist in der hier gebrachten Lösung des Außenraumproblems enthalten.

Wir wollen die Lösungen unserer Integralgleichungen nun zu speziellen Feldern in Beziehung setzen und bemerken zunächst, daß mit den zu Beginn eingeführten Abkürzungen nach (1.6) die Gleichungen (1.7) und (1.8)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{0, \mathfrak{k}\} = 0; \qquad \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{\mathfrak{h}, 0\} = 0 \tag{1.18}$$

bedeuten. Diese Gleichungen sind äquivalent mit

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{0, \mathfrak{k}\} = \mathfrak{k}; \qquad \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{h}. \tag{1.19}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt dann in Verbindung mit den Sprungrelationen (1.4)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a\{0, \mathfrak{k}\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{0, \mathfrak{k}\} = 0. \tag{1.20}$$

Ist andererseits $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ ein Feld, das in G den Maxwellschen Gleichungen genügt und auf F die Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0 = 0$ erfüllt, so wird nach dem Huyghensschen Prinzip (1.5)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{0, \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0, \tag{1.21}$$

so daß $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0$ zu $\mathfrak{K}$ gehört. Nun ist aber nach (1.18) $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i\{\mathfrak{h}, 0\} = 0$ und wir erhalten

Lemma 2: *Durch*

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}$$

wird $\mathfrak{H}$ *umkehrbar eindeutig auf* $\mathfrak{K}$ *abgebildet.*

Es ist nämlich wegen (1.21) für alle $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}, 0\} \in \mathfrak{K}. \tag{1.22}$$

Wäre nun die Dimension der Gesamtheit aller $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i(\mathfrak{h}, 0)$ kleiner als die Dimension von $\mathfrak{K}$, die gleich der Dimension von $\mathfrak{H}$ ist, so gäbe es ein $\mathfrak{h}^*$ aus $\mathfrak{H}$ mit

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}^*, 0\} = 0. \tag{1.23}$$

Wegen

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}^*, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{\mathfrak{h}^*, 0\} = 0 \tag{1.24}$$

folgt aber über den Eindeutigkeitssatz

$$0 = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a\{\mathfrak{h}^*, 0\} = \mathfrak{h}^*, \tag{1.25}$$

so daß das durch $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i\{\mathfrak{h}, 0\}$ vermittelte Bild von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$ liegt und die gleiche Dimension wie $\mathfrak{K}$ hat. Dies ist aber die Aussage von Lemma 2.

Mit (1.5) und (1.19) können wir jedem $\mathfrak{k}$ aus $\mathfrak{K}$ umkehrbar eindeutig ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zuordnen, das in G den Maxwellschen Gleichungen und

der Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i = 0$ genügt, wenn wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i$ setzen. Mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ besitzt aber auch $\overline{\mathfrak{E}}$, $-\overline{\mathfrak{H}}$ diese Eigenschaften und wir finden

Lemma 3: *Mit $\mathfrak{k}$ gehört auch $\overline{\mathfrak{k}}$ zu $\mathfrak{K}$, so daß jedem $\mathfrak{k}$ eindeutig ein $\mathfrak{h}$ mit*

$$\overline{\mathfrak{k}} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i \{\mathfrak{h}, 0\}$$

zugeordnet ist.

Wir beweisen nun noch

Lemma 4: *Für alle $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{H}$ ist*

$$Re \int_F \overline{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}\, dF \leqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\mathfrak{h} = 0$ gilt.

Wir betrachten zum Beweise das Feld $\mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}$, $\mathfrak{H}\{\mathfrak{h}, 0\}$, das den Ausstrahlungsbedingungen genügt und wählen um einen beliebigen festen Mittelpunkt eine Schar von Kugeln mit den Radien R. Das Innere der Kugeln sei $V(R)$ und $F(R)$ die Randfläche. Ist R dann so groß, daß das von uns betrachtete Gebiet G ganz in $V(R)$ liegt, so wird unter Beachtung der Unstetigkeiten des Feldes $\mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}$, $\mathfrak{H}\{\mathfrak{h}, 0\}$

$$\begin{aligned} \int_{V(R)} V(\mathfrak{E} \times \overline{\mathfrak{H}})\, dV &= \int_{V(R)} i\,\omega\, [\mu\, \mathfrak{H}\, \overline{\mathfrak{H}} - \varepsilon\, \mathfrak{E}\, \overline{\mathfrak{E}}]\, dV \\ &= \int_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\, dF + \int_F \overline{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{E}\, dF. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Auf Grund der Ausstrahlungsbedingungen wird daher

$$-Re \int_F \overline{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}\, dF = \lim_{R \to \infty} \int_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E} \times \overline{\mathfrak{H}})\, dF = \frac{k}{\omega \mu} \lim_{R \to 0} \int_{F(R)} |\mathfrak{E}|^2\, dF \geqq 0. \tag{1.27}$$

Aus dem Gleichheitszeichen folgt hier nach der Argumentation des Eindeutigkeitssatzes [7, 8]

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a \{\mathfrak{h}, 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a \{\mathfrak{h}, 0\} = 0 \tag{1.28}$$

und somit wegen (1.19) $\mathfrak{h} = 0$.

Es sei $\mathfrak{h}_\tau$ eine Basis von $\mathfrak{H}$. Dann ist nach Lemma 2

$$\mathfrak{k}_\tau = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}_\tau, 0\} \tag{1.29}$$

eine Basis von $\mathfrak{K}$. Mit der Basis

$$\overline{\mathfrak{k}}_\tau = \mathfrak{n} \times \overline{\mathfrak{h}}_\tau \tag{1.30}$$

von $\mathfrak{T}$ bilden wir analog zur Matrix der Strahlungskapazität

$$c_{\tau\sigma} = \int_F (\overline{\mathfrak{k}}_\tau\, \mathfrak{k}_\sigma)\, dF = \int_F \mathfrak{h}_\tau\, \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}_\sigma, 0)\, dF. \tag{1.31}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{E}_\tau = \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}_\tau, 0\}; \quad \mathfrak{H}_\tau = \mathfrak{H}\{\mathfrak{h}_\tau, 0\}, \tag{1.32}$$

so wird mit den Bezeichnungen von (1.26) wegen (1.19)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V(R)} [V(\mathfrak{E}_\tau \times \mathfrak{H}_\sigma) - V(\mathfrak{E}_\sigma \times \mathfrak{H}_\tau)]\, dV \\ &= \int_{F(R)} [\mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\tau \times \mathfrak{H}_\sigma) - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\sigma \times \mathfrak{H}_\tau)]\, dF + \int_F (\mathfrak{h}_\tau \mathfrak{E}_\sigma - \mathfrak{h}_\sigma \mathfrak{E}_\tau)\, dF. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Auf Grund der Ausstrahlungsbedingungen ist für große R

$$\int_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\tau \times \mathfrak{H}_\sigma)\, dF = \frac{k}{\omega\mu} \int_{F(R)} \mathfrak{E}_\tau \mathfrak{E}_\sigma dF + o(1) = \int_{F(R)} \mathfrak{n}(\mathfrak{E}_\sigma \times \mathfrak{H}_\tau)\, dF + o(1), \tag{1.34}$$

so daß wir aus (1.31) die Symmetrie der Matrix $c_{\tau\sigma}$ erhalten. Wir beweisen nun

Lemma 5: *Die Matrix $c_{\tau\sigma}$ ist nicht entartet.*

Wäre nämlich $\det |c_{\tau\sigma}| = 0$, so gäbe es ein nicht triviales $\mathfrak{k}^* \in \mathfrak{K}$ so, daß für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$

$$0 = \int (\bar{\mathfrak{t}}\, \mathfrak{k}^*)\, dF = \int (\mathfrak{t}\, \bar{\mathfrak{k}}^*)\, dF \tag{1.35}$$

ist. Auf Grund von Lemma 3 gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mathfrak{h}^* \in \mathfrak{H}$ mit

$$\bar{\mathfrak{k}}^* = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}^*, 0\}. \tag{1.36}$$

Da nach Lemma 1 $\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{h}}^*$ zu $\mathfrak{T}$ gehört, wäre somit

$$\int \bar{\mathfrak{h}}^* \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}^*, 0\}\, dF = 0. \tag{1.37}$$

Daraus folgt aber nach Lemma 4 über (1.36) entgegen der Annahme $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{k}^* = 0$, so daß $\det |c_{\tau\sigma}| \neq 0$ ist.

Damit gibt es zu jedem $\mathfrak{t}^* \in \mathfrak{T}$ ein $\mathfrak{k}^* \in \mathfrak{K}$ so, daß für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$

$$\int_F (\mathfrak{t}^* - \mathfrak{k}^*)\, \bar{\mathfrak{t}}\, dF = 0 \tag{1.38}$$

ist.

§ 2.

Die Randwertprobleme.

Bei der Behandlung der Randwertprobleme wollen wir annehmen, daß die vorgegebenen Werte differenzierbar sind und ihre Ableitungen Hölder-Bedingungen genügen.

Wir wenden uns zunächst dem Innenraumproblem zu und setzen voraus, es gäbe ein Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, das in G den Maxwellschen Gleichungen derart genügt, daß auf F $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i = \mathfrak{g}$ ist. Mit $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ bezeichnen wir eine in G stetig differenzierbare Lösung der Maxwellschen Gleichungen mit $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i^0 = 0$. Dann ist

$$V \times V \times \mathfrak{E} = k^2 \mathfrak{E}; \qquad V \times V \times \mathfrak{E}^0 = k^2 \mathfrak{E}^0, \tag{2.1}$$

und wir erhalten

$$0 = \int_G [\mathfrak{E} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathfrak{E}^0 - \mathfrak{E}^0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathfrak{E}]\, dV$$

$$= \int_F \mathfrak{n} [\mathfrak{E}^0 \times \nabla \times \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \times \nabla \times \mathfrak{E}^0]\, dF, \tag{2.2}$$

so daß

$$0 = \int_F (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}) \cdot \nabla \times \mathfrak{E}^0 dF = -i\omega\mu \int_F (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E})\, \mathfrak{H}^0 dF \tag{2.3}$$

ist. Wegen (1.5) ist aber

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i \{-(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0), 0\} = 0; \qquad \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i \{-(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0), 0\} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0, \tag{2.4}$$

so daß auf Grund der Sprungrelationen (1.4)

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_a \left(-(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0), 0\right) = 0 \tag{2.5}$$

folgt. Aus den Darstellungen (1.1) ergibt sich damit, daß $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, während aus dem Huygheнsschen Prinzip die Existenz eines Feldes $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ mit $\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0 = \mathfrak{k}$ für jedes $\mathfrak{k}$ aus $\mathfrak{R}$ folgt. Es wird daher wegen (2.3)

$$\int_F \mathfrak{E}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_i^0)\, dF = \int_F \mathfrak{E}\, \mathfrak{k}\, dF = 0. \tag{2.6}$$

Aus Lemma 1 folgt dann wegen $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_i = \mathfrak{g}$ für alle $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$

$$\int_F \mathfrak{g}\, \bar{\mathfrak{s}}\, dF = 0, \tag{2.7}$$

so daß diese Bedingung notwendig für die Existenz einer Lösung des zugehörigen Innenraumproblems ist.

Zum Beweis der Existenz der Lösung dieses Problems setzen wir

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\{0, \mathfrak{f}\}; \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\{0, \mathfrak{f}\} \tag{2.8}$$

und erhalten nach (1.6) mit den Bezeichnungen (1.9) zur Bestimmung von $\mathfrak{f}$ die Integralgleichung

$$\tfrac{1}{2}(E - M)\, \mathfrak{f} = \mathfrak{g}. \tag{2.9}$$

Hinreichend für die Existenz einer Lösung ist, daß für alle $\mathfrak{s}$ mit

$$\mathfrak{s}\,(E - \overline{M}) = 0 \tag{2.10}$$

$$\int_F \bar{\mathfrak{s}}\, \mathfrak{g}\, dF = 0 \tag{2.11}$$

ist. Wir finden damit

Satz 1: *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung des Innenraumproblems mit* $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = \mathfrak{g}$ *ist, daß für alle* $\mathfrak{s}$ *aus* $\mathfrak{S}$

$$\int_F \mathfrak{g}\, \bar{\mathfrak{s}}\, dF = 0$$

gilt.

Zur Lösung des Außenraumproblems stellen wir die vorgegebenen Randwerte $\mathfrak{g}$ in der Form

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* + \mathfrak{t}^* \tag{2.12}$$

dar, wo $\mathfrak{t}^* \in \mathfrak{T}$ durch die Bedingungen

$$\int_F \mathfrak{g}\, \bar{\mathfrak{t}}\, dF = \int_F \mathfrak{t}^*\, \bar{\mathfrak{t}}\, dF \quad \text{für alle } \mathfrak{t} \in \mathfrak{T} \tag{2.13}$$

eindeutig bestimmt ist. Zu diesem $\mathfrak{t}^*$ gibt es nach (1.38) ein $\mathfrak{k}^* \in \mathfrak{N}$ so, daß für alle $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$

$$\int (\mathfrak{t}^* - \mathfrak{k}^*)\, \bar{\mathfrak{t}}\, dF = 0 \tag{2.14}$$

ist. Wir setzen nun

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* + \mathfrak{t}^* - \mathfrak{k}^* + \mathfrak{k}^* = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{k}^*, \tag{2.15}$$

wobei nach (2.13) und (2.14)

$$\int_F \mathfrak{g}_0\, \bar{\mathfrak{t}}\, dF = 0 \tag{2.16}$$

ist.

Das Randwertproblem lösen wir durch den Ansatz

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\{0, \mathfrak{f}\} + \mathfrak{E}\{\mathfrak{h}, 0\}; \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\{0, \mathfrak{f}\} + \mathfrak{H}\{\mathfrak{h}, 0\}, \tag{2.17}$$

wobei wir nach Lemma 3 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ so bestimmen können, daß

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}(\mathfrak{h}, 0) = \mathfrak{k}^* \tag{2.18}$$

ist. Die Bestimmung von $\mathfrak{f}$ führt über

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_a\{0, \mathfrak{f}\} = \mathfrak{g} \tag{2.19}$$

nach (1.6) zu der Integralgleichung

$$-\tfrac{1}{2}(E + M)\,\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_0, \tag{2.20}$$

die wegen (2.16) eine durch die Zusatzbedingung

$$\int_F \mathfrak{f}\, \bar{\mathfrak{k}}\, dF = 0 \qquad \mathfrak{k} \in \mathfrak{N} \tag{2.21}$$

eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Da diese Lösung differenzierbar ist und ihre Ableitungen Hölder-Bedingungen genügen, erhalten wir

Satz 2: *Das Außenraumproblem besitzt für alle* $\mathfrak{g}$ *eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Es sei abschließend noch darauf hingewiesen, daß die hier vorausgesetzten Differenzierbarkeitsbedingungen für die Randwerte garantieren, daß auch die zugehörigen magnetischen Feldstärken bei Approximation an F stetig bleiben. Die Annahme der Randwerte für $\mathfrak{E}$ ist bereits gewährleistet, wenn wir von $\mathfrak{g}$ nur Stetigkeit verlangen.

Literatur.

[1] Weyl, H.
Math. Z. **55**, 187—198 (1952).
[2] Saunders, W. K.
University of California, Antenna Laboratory, Ser. 7, No. 176. 1951.
[3] Müller, Cl.
Math. Ann. **123**, 345—378 (1951).
[4] Weyl, H.
Crelle **143**, 177—202 (1913).
[5] Weyl, H.
Rend. Circ. Mat. Palermo **39**, 1—45 (1915).
[6] Müller, Cl.
Abh. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Math.-naturwiss. Kl. **1945—46**, Nr. 3.
[7] Magnus, W.
Jahresber. D.M.V. **52**, 177—185 (1942).
[8] Rellich, F.
Jahresber. D.M.V. **53**, 57—65 (1943).
[9] Saunders, W. K.
University of California, Antenna Laboratory, Ser. 7, No. 175. 1950.
[10] Müller, Cl.
Math. Z. 56, 80—83 (1952).

(Eingegangen am 5. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 271—279 (1952).

Zur Verbiegung von Flächen im Großen.

Dem Andenken St. Cohn-Vossens gewidmet.

Von

Eduard Rembs in Berlin.

Ich behandle im folgenden: 1. endliche Verbiegungen des abgeplatteten Rotationsellipsoids, 2. die eindeutige Bestimmtheit der konvexen Flächen mit geschlossenem sphärischem Bild durch das Linienelement, 3. analytische geschlossene unstarre Flächen mit „Taille" und analytische geschlossene durch das Linienelement nicht eindeutig bestimmte Flächen, 4. die bedingte Starrheit konvexer Kalotten.

1. In den Mathematischen Nachrichten [1] habe ich für das abgeplattete Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2+y^2}{1+k^2}+z^2=1$$

die folgende Schar von Biegungsflächen angegeben:

$$x=\sqrt{\frac{C}{\beta}}\,\frac{2V(U\cos u-U'\sin u)}{(C+1)(U^2-V^2-k_1^2)},$$

$$y=\sqrt{\frac{C}{\beta}}\,\frac{2V(U\sin u+U'\cos u)}{(C+1)(U^2-V^2-k_1^2)},$$

$$z=v-\frac{2VV'}{(C+1)(U^2-V^2-k_1^2)},$$

wobei gesetzt ist

$$U=\frac{1}{\sqrt{C}}\,\mathfrak{Cof}\left(u\sqrt{C}\right),\qquad U'=\mathfrak{Sin}\left(u\sqrt{C}\right),$$

$$V=\frac{1}{\sqrt{C+1}}\cos\left(v\sqrt{C+1}\right),\qquad V'=-\sin\left(v\sqrt{C+1}\right),$$

$$\beta=(1+k^2)\,C+k^2,\qquad k_1^2=\frac{k^2}{\beta\,C}$$

und C den Scharparameter der Flächenschar bedeutet. Mit Benutzung der Dissertation [2] meiner Tochter konnten die Formeln für die Abwicklung auf das abgeplattete Rotationsellipsoid aufgestellt werden.

Hier werden von zwei dieser Flächen Schnitte mit der x, y- und der x, z-Ebene wiedergegeben; k^2 ist gleich 2 gewählt.

Die erstere ergibt sich durch den Grenzübergang $C\to 0$:

$$x=\frac{2k\cos u\cos v}{1+k^2u^2+k^2\sin^2 v},$$

$$y=\frac{2k\sin u\cos v}{1+k^2u^2+k^2\sin^2 v},$$

$$z=v+\frac{k^2\sin 2v}{1+k^2u^2+k^2\sin^2 v}.$$

Mit $-\infty \leq u \leq +\infty$, $-\frac{\pi}{2\sqrt{C+1}} \leq v \leq +\frac{\pi}{2\sqrt{C+1}}$ erhält man eine Fläche, die isometrisch einem ganzen Rotationsellipsoid entspricht. Ein Äquatorstück von der Länge π — die halbe Rotationsachse ist 1 — erscheint zu einer geraden, auf der Fläche natürlich singulären Strecke ausgezogen.

Die Fläche stellt das Endresultat einer Verbiegung des abgeplatteten Rotationsellipsoids mit Geradstreckung eines Äquatorbogens dar; im Gegensatz dazu kann man nach [2] beim verlängerten Rotationsellipsoid diese Verbiegung so weit treiben, bis die gerade Strecke dem halben

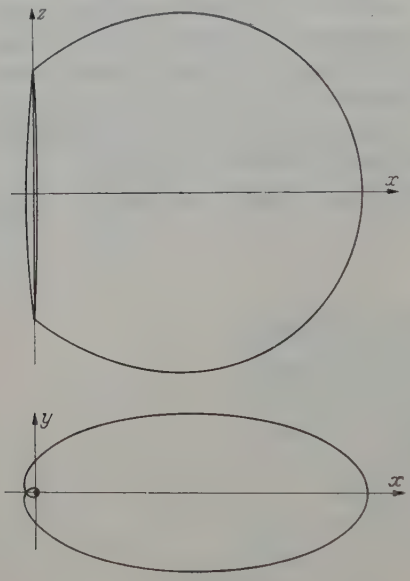

Fig. 1.

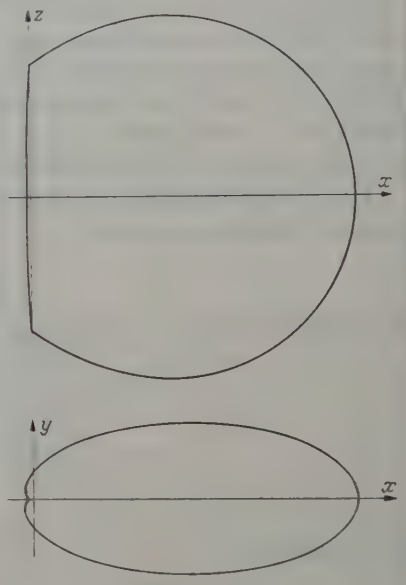

Fig. 2.

Äquator gleich ist, wobei dann natürlich auch die zweite Äquatorhälfte mit dieser geraden Strecke zusammenfällt. Die Grenzfläche war in diesem Fall schon von Bianchi gefunden worden, während sie für das abgeplattete Ellipsoid erstmals in [1] angegeben wird. Daß die Verbiegung beim abgeplatteten Ellipsoid mit der dargestellten Fläche zum Abschluß kommt, wenn die Fläche als Ganzes erhalten bleiben soll, hat natürlich einen einfachen Grund. Hier ist ein Äquatorbogen, der auch nur wenig größer als π wäre, nicht mehr kürzeste Verbindung seiner Endpunkte auf der Ellipsoidoberfläche.

Man lasse nun in unseren ersten Formeln C kleiner als 0 werden, doch so, daß immer noch $\beta > 0$ ist. Man überzeugt sich leicht, daß man auch dann noch reelle Flächen erhält. An Stelle der hyperbolischen treten dabei auch für den Parameter u trigonometrische Funktionen. Aber alle diese Flächen haben Rückkehrkanten, und ein durch zwei Rückkehrkanten begrenztes, sonst reguläres Flächenstück entspricht isometrisch nicht mehr dem ganzen Ellipsoid und ist mit einer Aus-

nahme offen. In Fig. 2 ist der Ausnahmefall dargestellt. Der zugehörige Wert von C ist $-\frac{1}{9}$; wegen $\beta > 0$ ist für die Existenz eines solchen Flächenstückes also stets $k^2 > \frac{1}{8}$ vorausgesetzt. Man braucht hier nur die Parameterwerte $|u| \leq \frac{3\pi}{2}$ in Betracht zu ziehen. Die Rückkehrkante $u = \pm \frac{3\pi}{2}$ erscheint im Schnitt mit der x, y-Ebene als Spitze. Mittels der Abwicklungsformeln von [1] kann genau das symmetrisch zu einem gewissen Äquatorbogen gelegene Zweieck der Ellipsoidfläche bestimmt werden, das man herauszuschneiden hat, so daß man durch Zug an den Winkeln des Ausschnittes und Einbiegen der Ränder zu dieser geschlossenen Fläche mit Rückkehrkante gelangt.

2. Der Satz von Herglotz [3] für die eindeutige Bestimmtheit der Eiflächen durch das Linienelement gründet sich auf eine Integralformel ([4] oder [5]) für zwei isometrische Flächen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$, die folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\oint \{(\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_1)(\bar{\omega}_1 - \omega_1) + (\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_2)(\bar{\omega}_2 - \omega_2)\} =$$
$$\int \{[\sigma_1, \bar{\omega}_1 - \omega_1] + [\sigma_2, \bar{\omega}_2 - \omega_2]\} - \int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_3)[\bar{\omega}_1 - \omega_1, \bar{\omega}_2 - \omega_2].$$

Hier sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ Tangentenvektoren an die Kurven eines rechtwinkligen Netzes auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_3$ ist Normalenvektor, es bedeuten

$$\sigma_1 = (d\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_1), \quad \sigma_2 = (d\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}_2), \quad \omega_1 = (d\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3), \quad \omega_2 = (d\mathfrak{a}_3\, \mathfrak{a}_1), \quad \omega_3 = (d\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2)$$

Pfaff-Cartansche Formen, runde Klammern Skalarprodukte, eckige Klammern alternierende Produkte, und die entsprechenden Größen für $\bar{\mathfrak{x}}$ sind durch einen Strich gekennzeichnet.

Der Beweis der Kongruenz isometrischer Eiflächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ folgt daraus, daß bei Anwendung der Formel auf Eiflächen, bei geeigneter Lage der Flächen zum Nullpunkt und geeigneter Wahl der Normalenrichtungen der letzte Integrand durchweg ≤ 0 sein muß, während alle Randintegrale verschwinden.

Nun seien $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ nicht Eiflächen, sondern offene konvexe Flächen mit solchen ebenen parabolischen Rändern, daß das sphärische Bild geschlossen ist. Die Starrheit dieser Flächen habe ich früher bewiesen [6]. Ich will zeigen, daß aus der Formel von Herglotz auch in Anwendung auf solche isometrischen Flächen die Kongruenz unmittelbar folgt. Hier treten zwar Randintegrale auf, aber es ergibt sich leicht, daß alle Integranden verschwinden. Es ist nämlich

$$\omega_1\, \mathfrak{a}_1 + \omega_2\, \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3 \times (\omega_2\, \mathfrak{a}_1 - \omega_1\, \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_3 \times d\mathfrak{a}_3,$$

und das ist 0 wegen $\mathfrak{a}_3 = \text{const}$ an jedem Rande. $\bar{\omega}_1\, \mathfrak{a}_1 + \bar{\omega}_2\, \mathfrak{a}_2$ ist ferner derjenige in der Tangentialebene von $\mathfrak{x}$ gelegene Vektor, der dem Vektor $\bar{\omega}_1\, \bar{\mathfrak{a}}_1 + \bar{\omega}_2\, \bar{\mathfrak{a}}_2 = \bar{\mathfrak{a}}_3 \times d\bar{\mathfrak{a}}_3$ in der Isometrie entspricht. Er muß also an den Rändern der Nullvektor sein, weil auch an den Rändern der zweiten Fläche $\bar{\mathfrak{a}}_3 = \text{const}$, $\bar{\mathfrak{a}}_3 \times d\bar{\mathfrak{a}}_3$ der Nullvektor ist.

3. Cohn-Vossen [7] hat gezeigt, wie man aus Rotationseiflächen, die ja starr sind, durch Anbringen einer beliebig kleinen Rinne unstarre geschlossene Flächen bilden kann. Bei den erhaltenen Flächen bestand zwar noch Stetigkeit der zweiten Ableitungen, also der Krümmungen, aber nicht mehr der höheren Ableitungen. Man könnte denken, daß die Unstarrheit eine Folge dieser Unstetigkeiten wäre. Es wird daher gut sein, Beispiele geschlossener, sogar analytischer und durchweg regulärer Flächen anzugeben, die unstarr sind.

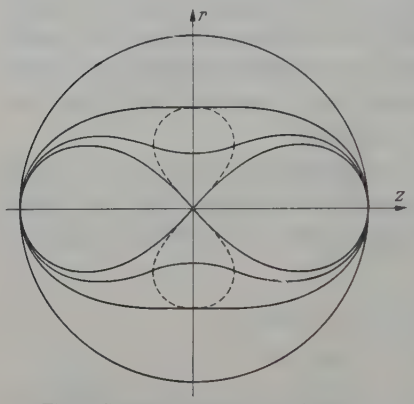

Fig. 3. Scharkurven für $c^2 = \frac{1}{2}, \frac{2}{20}, \frac{1}{3}, 0$; Wendepunktskurve gestrichelt.

Dazu betrachte ich die Kurvenschar

$$(r^2 + z^2)^2 + 2c^2 (r^2 - z^2) = 1 - 2c^2,$$

$$\tfrac{1}{2} \geqq c^2 \geqq 0.$$

Für $c^2 = \frac{1}{2}$ liegt eine Lemniskate, für $c^2 = 0$ ein Kreis vor. Alle Kurven haben die Koordinatenachsen als Symmetrieachsen, für $c^2 < \frac{1}{3}$ hat man es mit Eilinien zu tun; die Kurven, die hier besonders von Interesse sind, mit $\frac{1}{2} > c^2 > \frac{1}{3}$ besitzen Wendepunkte; bei ihrer Rotation um die z-Achse erhält man Flächen „mit Taille", unter denen sich unstarre befinden, die Flächen mit $c^2 < \frac{1}{3}$ sind Eiflächen. Es sei noch bemerkt, daß die Wendepunktskurve sich einfach durch folgende Gleichungen darstellen läßt:

$$(r^2 + z^2)^2 = c^2 (r^2 - z^2) = \frac{1 - 2c^2}{3}.$$

$r = r(z)$ bedeute die durch die Kurvengleichung definierte Funktion,

$$\mathfrak{x}(z, v) = (r \cos v,\ r \sin v,\ z)$$

also die zugehörige Rotationsfläche. Ich betrachte infinitesimale Verbiegungen

$$\mathfrak{x}(z, v) + t\, \mathfrak{z}(z, v)$$

von $\mathfrak{x}(z, v)$ mit

$$\mathfrak{z}(z, v) = (R_n(z) \{n \cos n v \cos v + \sin n v \sin v\},$$

$$R_n(z) \{n \cos n v \sin v - \sin n v \cos v\}, \qquad n Z_n(z) \cos n v),$$

wo n eine ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet.

Die Isometriebedingung

$$d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z} = 0$$

führt zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$r' R_n' + Z_n' = 0, \qquad (n^2 - 1) r' R_n + r R_n' + n^2 Z_n = 0,$$

aus denen sich die Gleichung 2. Ordnung für R_n

$$r R_n'' + (n^2 - 1) r'' R_n = 0$$

ergibt. (Vgl. [7], [8], [9].)

Für das Verhalten von R_n in den Endpunkten $z = \pm 1$ unseres Intervalls, in denen die Meridiankurven auf der z-Achse senkrecht stehen, während $r = 0$ ist, findet man z. B. nach Transformation auf r als unabhängige Veränderliche, daß R_n dort Integrale besitzt, die sich wie r^{1+n} bzw. r^{1-n} verhalten. Das letztere Integral wird also dort unendlich, das erstere ist regulär.

Weiter werde nun die vorstehende Gleichung mit z als unabhängiger Veränderlicher betrachtet.

Für die Flächen mit Taille kann ich im mittleren Intervall ($r'' > 0$) ein beliebiges abgeschlossenes Intervall, das nicht bis zu den Wendepunkten reicht, herausgreifen und das Minimum von r''/r in Betracht ziehen. Wie klein dies Minimum auch sein möge, kann ich doch, indem ich n genügend groß wähle, erreichen, daß jedes Integral R_n dort eine Zahl von Nullstellen hat, die größer ist als jede vorgeschriebene Zahl, wie der übliche Vergleich mit der Gleichung $R_n'' + \lambda^2 R_n = 0$ ($\lambda = \text{const}$) lehrt.

In den beiden äußeren Intervallen ist $r'' < 0$. Aus der Differentialgleichung folgt: kein R_n kann dort ein positives Maximum ($R_n > 0$, $R_n'' \leqq 0$) oder negatives Minimum haben, und dasselbe gilt im ganzen Intervallinneren $-1 < z < +1$, wenn als $r(z, c)$ in der Differentialgleichung eine der Eilinien $c^2 < \frac{1}{3}$ genommen wird. In einem solchen Intervall kann also R_n höchstens eine Nullstelle haben; für sie verschwindet zugleich R_n''. Auf Grund dieser Bemerkungen kann man sich den Verlauf der Integralkurven durchaus verdeutlichen.

Zum Beweis unserer Behauptung wähle man nun irgendeine Fläche mit $\frac{1}{2} > c^2 > \frac{1}{3}$ und betrachte im folgenden etwa stets ein Integral unserer Gleichung, das für $z = -1$ regulär ist. Außerdem möge n so groß gewählt sein, daß mindestens noch eine Nullstelle von R_n in $-1 < z \leqq 0$ vorhanden ist[1]). Dieses n halte man fest, lasse aber c stetig abnehmen. Für genügend kleines c gibt es keine Nullstellen mehr in $-1 < z \leqq 0$. Waren anfangs etwa k Nullstellen vorhanden, so betrachte man die untere Grenze der Werte c, für die k Nullstellen existieren. Für dieses c muß eine Nullstelle in $z = 0$ liegen, und wegen der Symmetrieverhältnisse ist die Fortsetzung dieser Lösung auch in $z = +1$ regulär. Damit ist für dieses c die Existenz eines Integrals erwiesen, das an beiden Rändern regulär ist, nämlich sich wie r^{1+n} verhält. Dies aber ist die einzige

[1]) Indem ich das Halbintervall betrachte, folge ich einem Vorschlag des Herrn F. Schäfke. Er bringt überdies die Differentialgleichung von vornherein auf die Gestalt

$$(1 - z^2)^2 R_n''(z, c^2) - (n^2 - 1) \varphi(z^2, c^2) R_n(z, c^2) = 0,$$

$\varphi(z^2, c^2)$ für $-1 \leqq z \leqq +1$ und $0 \leqq c^2 < \frac{1}{2}$ regulär analytisch in z^2, c^2, $\varphi(1, c^2) = 1$

Forderung, die an R_n zu stellen ist, damit sich aus ihm eine infinitesimale Verbiegung der ganzen betreffenden Fläche ableiten läßt.

Sind noch weitere Nullstellen in $-1 < z < 0$, so kann man durch Anwendung derselben Schlußweise die Existenz weiterer, zu kleineren c gehöriger infinitesimal verbiegbarer Flächen der Schar nachweisen. Endlich muß es auch solche c geben, für die $R_n(z)$ eine gerade Funktion von z ist. Man hat dazu nur die untere Grenze der c zu wählen, für die eine feste Zahl von Nullstellen der Ableitung $R_n'(z)$ im Halbintervall vorhanden ist. Da ferner n beliebig groß gewählt werden kann, so ergibt sich, daß in unserer Flächenschar abzählbar unendlich viele unstarre Flächen enthalten sind[2]).

Bisher wurde $\mathfrak{x} + t\,\mathfrak{z}$ als infinitesimale Verbiegung von $\mathfrak{x}$ angesehen. Statt dessen will ich nun die Flächen

$$\mathfrak{x} + t\,\mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} - t\,\mathfrak{z}$$

betrachten. Sie besitzen wegen $d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} = 0$ dasselbe Linienelement

$$d\mathfrak{x}^2 + t^2\,d\mathfrak{z}^2,$$

sind also isometrisch aufeinander so abgebildet, daß entsprechende Punkte zu gleichen Parameterwerten z, v gehören. Aber diese Isometrie ist keine Kongruenz. Die beiden Polpaare der Flächen entsprechen sich nämlich; wählt man aber $z = \text{const}$ so, daß dafür $R_n = 0$, $r \neq 0$ ist, so folgt: $Z_n \neq 0$. Die beiden Kurven haben also in entsprechenden Punkten dieselben Werte von x_1, x_2, nämlich die der Fläche $\mathfrak{x}$, während außer für $\cos n\,v = 0$ die x_3-Werte verschieden voneinander sind. Während also eine Eifläche durch ihr Linienelement eindeutig bestimmt ist, haben wir hier Paare geschlossener isometrisch aufeinander bezogener Flächen, für welche die Isometrie keine Kongruenz bedeutet; für genügend kleines t sind die Flächen natürlich auch singularitätenfrei.

Ich möchte noch auf die Kurven mit $Z_n = 0$ hinweisen. Unsere Differentialgleichungen zeigen, daß zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von R_n', bei gleichem Vorzeichen von r', stets eine Nullstelle von Z_n liegen muß. Damit lassen sich mannigfach Kalotten und Zonen angeben, die infinitesimale Gleitverbiegungen gestatten. Die Frage der Verbiegbarkeit in höherer Ordnung habe ich nicht untersucht.

4. Zuletzt soll eine gelegentlich von Herrn W. Süss aufgeworfene Frage beantwortet werden. Die Frage lautet: Vorgelegt sei eine durchweg konvexe Flächenkalotte, deren Rand bei Abbildung durch parallele Normalen auf die Kugel einen Großkreis als Bildkreis hat, mit anderen Worten, deren Rand Eigenschattengrenze bei Parallelbeleuchtung ist: kann die Kalotte so verbogen werden, daß der Rand Eigenschattengrenze bleibt?

[2]) Das Ergebnis steht meines Erachtens im Widerspruch zur Dissertation des Herrn F. Rubin [10], in der die Starrheit aller geschlossenen analytischen regulären und flachpunktfreien Flächen vom Geschlecht 0 behauptet wird.

Ich behaupte, daß die Kalotte bei dieser Nebenbedingung starr ist.

Die Lichtrichtung stimme mit der 3-Achse überein. $\mathfrak{a}_3$ sei der Einheitsvektor der positiven 3-Achse. Das Normalenbild überdecke die „nördliche" Halbkugel. Für die Randelemente muß die 3. Komponente des Normalenvektors ξ gleich 0 sein: $(\xi\, \mathfrak{a}_3) = 0$. Das soll sich bei der infinitesimalen Verbiegung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + t\mathfrak{z}$ nicht ändern; wenigstens kann ich dies ohne Einschränkung der Allgemeinheit fordern. Es sei $\mathfrak{y}(u, v)$ der Drehvektor der Verbiegung: dann geht ξ in $\xi + t(\mathfrak{y} \times \xi)$ über. Wir fordern also, daß die 3. Komponente von $\mathfrak{y} \times \xi$ am Rande verschwindet: $(\mathfrak{y}\ \xi\ \mathfrak{a}_3) = 0$.

Ich behandle zunächst die Annahme $\mathfrak{y} = \lambda\, \mathfrak{a}_3$ am Rande. Dann ist $d\mathfrak{y} = d\lambda\, \mathfrak{a}_3$. Nun gilt die folgende Formel [11]

$$\oint (\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, \mathfrak{y}) = 2 \iint (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv,$$

wobei das Integral rechts über die ganze Kalotte, das linke über den Rand zu erstrecken ist. In unserm Fall verschwindet das Randintegral. Dann läßt sich aber die Starrheit ebenso wie im Fall der Eiflächen folgern, wenn man noch annimmt, daß der Nullpunkt im Innern des Lichtzylinders liegt, und zwar in dem Teil, dem die Kalotte ihre hohle Seite zukehrt.

Nunmehr nehme ich an, es sei nicht am Rande $\mathfrak{y} = \lambda\, \mathfrak{a}_3$. Dann konstruiere ich den Drehriß, indem ich alle Drehvektoren $\mathfrak{y}(u, v)$ im Nullpunkt anhefte; dieses $\mathfrak{y}(u, v)$ ist der Ortsvektor des Drehrisses. Fläche und Drehriß haben aber in entsprechenden Punkten parallele Normalen bzw. Tangentialebenen. Für die Randelemente des Drehrisses liegen ferner wegen $(\mathfrak{y}\ \xi\ \mathfrak{a}_3) = 0$ der Ortsvektor, der Normalenvektor und die 3-Achse in einer Ebene, und da die Randelemente des Drehrisses zu den Ebenen dieses Büschels durch die 3-Achse normal sein müssen, so muß der Randstreifen auf einem Rotationszylinder mit der 3-Achse als Rotationsachse liegen. Die Weingartensche Funktion der Verbiegung $\varphi = (\mathfrak{y}\ \xi)$, d.i. der Abstand des Nullpunktes von den Tangentialebenen des Drehrisses, müßte für alle Randelemente einen von 0 verschiedenen, konstanten Wert haben.

Vom Drehriß eines positiv gekrümmten Flächenstücks ist aber noch mehr bekannt ([6], ausführlicher [12]). In inneren Punkten kann keine Komponente des Drehvektors $\mathfrak{y}$ nach irgendeiner festen Richtung ein Maximum oder Minimum haben. Daraus folgt, daß der Drehriß unserer Kalotte, der sich nicht ins Unendliche erstrecken darf, bis auf die Randpunkte ganz im Innern des Rotationszylinders liegen müßte. Ja noch mehr: Die „höchsten" Punkte M (in Richtung der 3-Achse) und die tiefsten m müssen Randpunkte sein; der Drehriß müßte bis auf den Rand ganz im Innern des Zylinderabschnitts zwischen den „Horizontalebenen" durch M und m gelegen sein.

Aber einen Drehriß unserer Kalotte, der alle diese Forderungen erfüllt, gibt es nicht. Man kann z.B. so schließen: M_1 und m_1 seien die

Bildpunkte eines Punktes M bzw. m auf der Normalenkugel, P_1 der Nordpol, P sein Bildpunkt auf dem Drehriß. Man betrachte auf der Kugel die zylindrischen Streifen von M_1 bis P_1 einerseits und von m_1 bis P_1 andererseits und ihre Bildstreifen auf dem Drehriß. Diese Bildstreifen liegen auf Zylindern, deren senkrechte Durchschnitte Spitzen haben können, aber keine Wendepunkte, da, abgesehen vom Rande, nicht zwei parallele Tangentialebenen an unserem Drehriß auftreten können. Rollt daher die Tangentialebene von M längs des ersten Bildstreifens ab, so wird ihre anfängliche (der Achse zugewandte) Innenseite zum Schluß nach oben gerichtet sein, die der Tangentialebene von m beim entsprechenden Vorgang nach unten. Beim Abrollen von M über P nach m wird zum Schluß die Ebene ihre ursprüngliche Innenseite nach außen wenden. Der Abstand vom Nullpunkt muß für beide Lagen entgegengesetztes Vorzeichen haben; er kann nicht am ganzen Rande konstant sein.

Indem also auch die Annahme $\mathfrak{y} = \lambda\, \mathfrak{a}_3$ am Rande ausscheidet, ist die Starrheit der Kalotte mit der angegebenen Nebenbedingung bewiesen.

Literaturverzeichnis.

[1] Rembs, E.
Reelle Biegungsflächen des abgeplatteten Rotationsellipsoids. Math. Nachr. **5**, 237—239 (1951).

[2] Rembs, J.
Neue Biegungsflächen des verlängerten Rotationsellipsoids. Math. Nachr. **3**, 152—175 (1950).

[3] Herglotz, G.
Über die Starrheit der Eiflächen. Abh. d. math. Sem. d. Hans. Univ. **15**, 127—129 (1943).

[4] Blaschke, W.
Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin 1950, S. 103—109.

[5] Rembs, E.
Integralformeln der Verbiegungstheorie. Math. Nachr. **7**, 61—64 (1952).

[6] Rembs, E.
Unverbiegbare offene Flächen. Ber. d. Akad. d. Wiss. Berlin 1930, S. 123—133.

[7] Cohn-Vossen, St.
Unstarre geschlossene Flächen. Math. Ann. **102**, 10—29 (1929).

[8] Rembs, E.
Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung. Math. Zeitschr. **35**, 529—535 (1932).

[9] Rembs, E.
Zur Verbiegung von Torusflächen. Phys.-Mediz. Sozietät Erlangen, Bd. 67/68, S. 4—12. 1935.

[10] Rubin, F.
Zur Deformation singularitätenfreier Flächen. Diss. Zürich 1950.

[11] Blaschke, W.
Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3. Aufl. Berlin 1930, S. 199.

[12] Rembs, E.
Zur Verbiegung konvexer Flächen mit geschlossenem sphärischem Bild. Diss. Bonn 1918.

Anmerkung bei der Korrektur. Inzwischen erhielt ich Kenntnis von den Arbeiten

[13] Stoker, J. J.
On the Uniqueness Theorems for the Embedding of Convex Surfaces in Three-Dimensional Space. Commun. on Pure a. Appl. Math. **3**, 231—257 (1950).

[14] Cohn-Vossen, St.
Verbiegbarkeit der Flächen im Großen. Usp. mat. nauk **1**, 33—76 (1936). [Russisch.]

In [13] wird bereits das Verschwinden der Randintegrale für die Flächen unseres Abschnitts 2 erwähnt. — Nach [14] gäbe es nichtstarre geschlossene analytische Flächen unter den Parallelflächen aller analytischen geschlossenen Rotationsflächen vom Geschlecht 0, die eine Zone mit negativer Gaussscher Krümmung haben. Der Beweis wurde nicht angegeben.

(Eingegangen am 7. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 280—288 (1952).

On the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series.

By

B. N. Prasad and **U. N. Singh** in Allahabad (India).

1.1. A series

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \tag{1.11}$$

is said to be strongly summable (C, 1) or summable [C, 1] to the sum s, if

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu - s| = o(n), \quad \text{as } n \to \infty, \tag{1.12}$$

s_ν being the sum of the first $(\nu+1)$ terms of the series (1.11). The series is said to be strongly summable (C, 1) with index k $(k > 0)$, or simply summable H_k, to the sum s, if

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu - s|^k = o(n), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.13}$$

The series is further said to be strongly summable (R, 1), [(R, 1) indicating RIESZ's logarithmic mean of order 1] or simply summable [R, 1] to the sum s, if

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu - s|}{\nu} = o(\log n), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.14}$$

It is strongly summable (R, 1) with index $k > 0$ to the sum s, if

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu - s|^k}{\nu} = o(\log n), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{1.15}$$

1.2. Let $f(t)$ be a periodic function of bounded variation with period 2π. Let the Fourier series corresponding to $f(t)$ be

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n t + b_n \sin n t). \tag{1.21}$$

The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \cos n t - a_n \sin n t) \tag{1.22}$$

which is obtained by differentiating the series (1.21) term by term, is called the first derived series or the derived Fourier series of $f(t)$. The series conjugate to (1.22) is

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \sin n t + a_n \cos n t). \tag{1.23}$$

2. It has been proved by one of the authors [1], by considering an example, that the derived series of a Fourier series associated with a function of bounded variation is not necessarily summable [C, 1] or summable [R, 1] at a point where the first differential coefficient not only exists, but is continuous also. The same example further shows that the derived series may not be summable H_2, nor indeed summable (R, 1) with index 2, anywhere in the interval of periodicity. The function considered in proving these results is the simplest function of bounded variation with just one jump in the whole interval of periodicity and is also absolutely continuous except at the origin. This shows that for strong summability of the derived series it will be necessary to impose some further restrictions upon the behaviour of the function. In the subsequent section we shall investigate the strong summability of the derived series.

Denoting by $\sigma_n(x)$ the sum of the first n terms of the series (1.22) at $t=x$, we get

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{d}{dx}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{\sin\frac{1}{2}(x-u)}\right\}f(u)\,du \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\left\{\frac{d}{du}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{\sin\frac{1}{2}(x-u)}\right\}du \qquad (2.1)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)\}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}dt.\end{aligned}$$

Now integrating by parts the right hand side of (2.1), we obtain

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,d\{f(x+t)-f(x-t)\} \qquad (2.2)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dg(t)+f'(x),\end{aligned}$$

where $f'(x)$ denotes the first generalised differential coefficient of $f(t)$ at $t=x$ and

$$g(t)=g(x,t)=f(x+t)-f(x-t)-2t\,f'(x).$$

We shall prove the following theorem.

Theorem A. *If $f(t)$ be a continuous function of bounded variation and if for some value of x and for some $\varepsilon>0$*

$$\int_0^t |dg(u)| = o\left\{\frac{t}{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}\right\}, \quad \text{as } t\to 0, \qquad (2.3)$$

then

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\sigma_\nu(x)-f'(x)| = o(n), \qquad (2.4)$$

that is, the derived series of $f(t)$ is summable [C, 1] *to the sum $f'(x)$ at $t=x$, provided that $f'(x)$ exists.*

In order to prove this theorem we shall require the following lemma:

Lemma. *If $f(t)$ be a continuous function of bounded variation and a_n, b_n are its Fourier coefficients, then*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(|a_\nu| + |b_\nu|) = o(n). \tag{2.5}$$

This is a simple corollary of the following result[1]) of WIENER.

If $\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, $\varrho_n \geqq 0$, then a necessary and sufficient condition that $f(t)$, a function of bounded variation, be continuous is that

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu = o(n).$$

Now, as $f(t)$ is a continuous function of bounded variation, we have

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu = o(n).$$

But

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, |a_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu,$$

as also

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, |b_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \varrho_\nu;$$

hence

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\,(|a_\nu| + |b_\nu|) = o(n).$$

3. Proof of Theorem A.

From (2.2) we get

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\sigma_\nu(x) - f'(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \frac{\sin(\nu + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} \right) dg(t),$$

where $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu(x) = \pm 1$ in such a way as to make

$$\varepsilon_\nu \{\sigma_\nu(x) - f'(x)\} \geqq 0 \qquad \text{for } \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Putting

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t = \cos\frac{1}{2} t \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \sin \nu t + \sin\frac{t}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \cos \nu t,$$

we get

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\sigma_\nu(x) - f'(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\cot\frac{t}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \sin \nu t \right) dg(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \cos \nu t \right) dg(t) = P + Q. \tag{3.1}$$

[1]) ZYGMUND, A. [2], p. 221.

Now

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu t \cdot dg(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu t \, d\{f(x+t) - f(x-t)\} + o(1)$$

$$= \left[\frac{\cos \nu t}{\pi}\{f(x+t) - f(x-t)\}\right]_0^\pi + \frac{\nu}{\pi}\int_0^\pi \sin \nu t \{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt + o(1)$$

$$= \frac{\nu}{\pi}\int_0^\pi \sin \nu t \{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt + o(1)$$

$$= \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(u) \cdot \sin \nu (u - x)\, du + o(1)$$

$$= \nu (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) + o(1),$$

where a_ν and b_ν are the Fourier coefficients of $f(t)$. Hence

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos \nu t \, dg(t) \leq \nu |a_\nu| + \nu |b_\nu|,$$

so that

$$|Q| = \left|\frac{1}{2}\sum_1^n \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varepsilon_\nu \cos \nu t \, dg(t)\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \cos \nu t \, dg(t)\right| \tag{3.2}$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\sum_1^n \nu (|a_\nu| + |b_\nu|)$$

$$= o(n) \quad \text{by (2.5).}$$

To evaluate P we observe that under the condition (2.3) we have

$$G(t) \equiv \int_0^t |dg(u)| = o(t), \quad \text{as } t \to 0. \tag{3.3}$$

Now

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^\pi\right) \cot \tfrac{1}{2} t \cdot \lambda_n(t)\, dg(t) \tag{3.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(P_1 + P_2),$$

where

$$\lambda_n(t) = \sum_1^n \varepsilon_\nu \sin \nu t.$$

But, as

$$|\lambda_n(t)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \cdot |\sin t|,$$

we have

$$|P_1| \leq \int_0^{1/n} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \sin t \frac{\cos \frac{1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot |dg(t)|$$

$$= \int_0^{1/n} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2}t \cos^2 \frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} |dg(t)| \tag{3.5}$$

$$\leq n(n+1) \int_0^{1/n} |dg(t)|$$

$$= o(n) \qquad \text{by (3.3).}$$

Again, since

$$|\lambda_n(t)| \leq n,$$

$$|P_2| \leq n \int_{1/n}^{\pi} \cot \tfrac{1}{2}t \, |dg(t)|.$$

But

$$\int_{1/n}^{\pi} \cot \frac{t}{2} \cdot |dg(t)| = \left[G(t) \cot \frac{1}{2}t\right]_{1/n}^{\pi} + \int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} t \, G(t) \, dt$$

$$= -G\left(\frac{1}{n}\right) \cot \frac{1}{2n} + \int_{1/n}^{\pi} 2 \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{G(t)}{t^2} dt$$

$$= -\frac{G\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n}} 2 \cos \frac{1}{2n} + o\left(\int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{t\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}} \cdot dt\right), \text{ by (2.3)}$$

$$= o(1) + o\left(\int_{\log \frac{1}{\pi}}^{\log n} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$= o(1).$$

Hence

$$P_2 = o(n). \tag{3.6}$$

Theorem A now follows from (3.1)—(3.6).

It will be observed that the condition (2.3) of Theorem A can be replaced by

$$\int_0^t |dg(u)| = o\left(\frac{t}{\xi(t)}\right), \qquad \text{as } t \to 0, \tag{3.7}$$

where $\xi(t)$ is any of the functions

$$\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad \log \frac{1}{t}\left(\log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon},$$

$$\log \frac{1}{t} \log \log \frac{1}{t}\left(\log \log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \ldots; \quad (\varepsilon > 0).$$

For under the condition (3.7), $G(t) = o(t)$, and hence P_1 of (3.4) is $o(n)$, and

$$P_2 = o(n) + o\left(n \int_{\log\log \ldots \log \frac{1}{\pi}}^{\log\log \ldots \log n} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}\right)$$
$$= o(n).$$

4. Conjugate derived series. It can be shown by considering the same example as was taken in connection with the derived Fourier series [1] that the conjugate derived series, as will naturally be expected, may not be summable H_2 anywhere in the open interval of periodicity and also that it may not be summable [C, 1] or [R, 1] at a point where $f'(x)$ exists. We shall now investigate the conditions under which the conjugate derived series is strongly summable.

Denoting by $\bar{\sigma}_n(x)$ the sum of the first n terms of the series (1.23), at $t = x$, we have

$$\bar{\sigma}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\sum_1^n \sin v\,(u-x)\right) du$$

$$(4.1) \qquad = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right] \{f(x+t) + f(x-t)\}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dh(t),$$

where

$$h(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

The sum associated with the conjugate derived series is

$$(4.2) \quad H(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} h(t)\,\mathrm{cosec}^2\frac{1}{2}t\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} h(t)\,\mathrm{cosec}^2\frac{1}{2}t\, dt\right\}.$$

We shall denote the integral

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{1/n}^{\pi} h(t)\,\mathrm{cosec}^2\frac{1}{2}t \cdot dt$$

by $H_n(x)$.

If the function $f(x)$ is of bounded variation, then $H(x)$ exists for almost all values of x [2, p. 146].

We shall now prove a theorem concerning the conjugate derived series analogous to Theorem A of § 2.

Theorem B. *If $f(t)$ be a continuous function of bounded variation with period 2π, and if for a value of x, where $f'(x)$ exists and for some $\varepsilon > 0$, we have*

$$(4.3) \qquad \varkappa(t) \equiv \int_0^t |dh(u)| = o\left(\frac{t}{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}\right), \quad \text{as } t \to 0,$$

then

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = o(n).$$

5. Proof of Theorem B.

It is evident that under the conditions (4.3)

$$\int_0^t |dh(u)| = o(t), \quad \text{as } t \to 0. \tag{5.1}$$

From (4.1) we get

$$\bar{\sigma}_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\pi}\right\} \cot\frac{1}{2}t\,(1-\cos\nu t)\,dh(t)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\nu t\,dh(t), \quad (\nu < n) \tag{5.2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(P+Q+R).$$

But

$$|P| \leq \int_0^{1/n} \left|\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot 2\sin^2\frac{\nu t}{2}\right| |dh(t)|$$

$$\leq 2\nu \int_0^{1/n} |dh(t)| = o(1)$$

and

$$-\frac{1}{2\pi}Q = -\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\,(1-\cos\nu t)\,dh(t)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\,dh(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\,dh(t)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cot\frac{1}{2}t\,h(t)\right]_{1/n}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\,h(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\cdot dh(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}}\frac{\frac{1}{2n}h\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n}} + H_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\,dh(t)$$

$$= o(1) + H_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\cos\nu t\,dh(t);$$

for $\frac{h(t)}{t} \to 0$ with t, as $f'(x)$ exists.

Hence

$$|\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \cot\frac{1}{2}t\,\varepsilon_\nu \cos\nu t\,dh(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_\nu \sin\nu t\,dh(t) + o(1),$$

where $\varepsilon_\nu = \pm 1$ in such a way that $\varepsilon_\nu\{\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)\} \geqq 0$ for $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Thus

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi}\cot\frac{1}{2}t\left(\sum_1^n \varepsilon_\nu\cos\nu t\right)dh(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_1^n\varepsilon_\nu\sin\nu t\right)dh(t) + o(n) \tag{5.3}$$

$$= I + J + o(n).$$

But

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\,dh(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\,d\{f(x+t)+f(x-t)\}$$

$$= \frac{\nu}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\nu t\{f(x+t)+f(x-t)\}\,dt$$

$$= \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos\nu(u-x)\,du$$

$$= \nu(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x),$$

where a_ν and b_ν are the Fourier coefficients of $f(t)$.

Thus

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\,dh(t)\right| \leqq \nu(|b_\nu| + |a_\nu|).$$

Hence

$$|J| = \frac{1}{2}\left|\sum_1^n\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_\nu\sin\nu t\,dh(t)\right\}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\sum_1^n\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\nu t\cdot dh(t)\right| \tag{5.4}$$

$$\leqq \frac{1}{2}\sum_1^n \nu(|a_\nu| + |b_\nu|)$$

$$= o(n), \quad \text{by the lemma of § 2.}$$

Therefore

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\bar{\sigma}_\nu(x) - H_n(x)| = I + o(n). \tag{5.5}$$

But, as

$$\left|\sum_1^n \varepsilon_\nu \cos \nu t\right| \leq n,$$

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} n \int_{1/n}^{\pi} \cot \frac{1}{2} t \, |dh(t)|.$$

Now,

$$\int_{1/n}^{\pi} \cot \frac{1}{2} t \, |dh(t)| = \left[\cot \frac{1}{2} t \, \varkappa(t)\right]_{1/n}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{1/n}^{\pi} \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2} \cdot \varkappa(t) \, dt$$

$$= -\frac{\cos \frac{1}{2n}}{\sin \frac{1}{2n}} \cdot \varkappa\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \int_{1/n}^{\pi} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{t}{2}} \frac{\varkappa(t)}{t^2} \cdot dt$$

$$= o(1) + o\left\{\int_{1/n}^{\pi} \frac{dt}{t\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}}\right\}, \quad \text{by (4.3)}$$

$$= o(1) + o\left\{\int_{\log \frac{1}{\pi}}^{\log n} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}\right\}$$

$$= o(1).$$

Hence

$$I = o(n). \tag{5.6}$$

Theorem B now follows from (5.3)—(5.6).

It will be observed that Theorem B will hold if the condition (4.3) is replaced by

$$\varkappa(t) = o\left(\frac{t}{\xi(t)}\right), \quad \text{as } t \to o, \tag{5.7}$$

where $\xi(t)$ is any of the functions

$$\left(\log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad \log \frac{1}{t}\left(\log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon},$$

$$\log \frac{1}{t} \log \log \frac{1}{t}\left(\log \log \log \frac{1}{t}\right)^{1+\varepsilon}, \ldots; \quad (\varepsilon > 0).$$

For, under the condition (5.7), $\varkappa(t) = o(t)$ and hence P of (5.2) is $o(1)$, and I of (5.3)

$$= o(n) + o\left(n \int_{\log \log \ldots \log \frac{1}{\pi}}^{\log \log \ldots \log n} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$= o(n).$$

References.

[1] Singh, U. N.
On the strong summability of the derived series of a Fourier series. Proc. Nat. Acad. Sci. India **15**, 63—72 (1946).

[2] Zygmund, A.
Trigonometrical Series. Warsaw 1935.

(Eingegangen am 22. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 289–295 (1952).

On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals.

By

Lennart Carleson, Uppsala (Schweden).

1. Let $\{z_\nu\}$, $0 < z_\nu < 1$, be a given sequence of points on the unit circle. Then there exists a function, bounded and analytic in $|z| < 1$ and satisfying the conditions $f(z_\nu) = 0$ and $f(0) = 1$, if and only if the series $\sum(1 - z_\nu)$ converges. This is a condition on $|z_\nu|$ alone. For the class D of functions with bounded DIRICHLET integrals, the situation is different, and necessary and sufficient conditions on $\{z_\nu\}$ are not known[1]). Nevertheless, it is here natural to pose the two following questions: given a sequence of real numbers r_ν, $0 < r_\nu < 1$, when does there exist a function f in the class D satisfying the conditions

$$\text{(C)} \qquad f(0) = 1, \qquad f(z_\nu) = 0, \qquad z_\nu = r_\nu e^{i\Theta_\nu},$$

either for *some* choice of the arguments Θ_ν or for *every* choice? We shall here prove the following theorem.

Theorem 1. *A necessary and sufficient condition that there exist a function f with bounded* DIRICHLET *integral and satisfying* (C) *for some choice of $\{\Theta_\nu\}$ is that the series*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1 - r_\nu) \tag{1}$$

converges. A sufficient condition that f exist for every choice of $\{\Theta_\nu\}$ is that for some $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\log\frac{1}{1-r_\nu}\right\}^{-1+\varepsilon} < \infty. \tag{2}$$

A necessary condition is that

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\log\frac{1}{1-r_\nu}\right\}^{-1-\varepsilon} < \infty \quad \textit{for every} \quad \varepsilon > 0. \tag{3}$$

The first part of this theorem is trivial. If the series (1) diverges, $f(z)$ vanishes identically according to a general theorem, and this contradicts the condition $f(0) = 1$. If (1) converges, we choose $\Theta_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$,

[1]) The theorem given in O. LOKKI: Über analytische Funktionen, deren DIRICHLET-Integral endlich ist und die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, Ann. Acad. Sci. Fenn. (A) **39** (1947), p. 47, is not true; the deduction on p. 49 is incorrect.

and form the BLASCHKE product

$$h(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_\nu-z}{1-z\,r_\nu}.$$

We obtain

$$|h'(z)|\leq\sum_{1}^{\infty}\frac{1-r_\nu^2}{|1-z\,r_\nu|^2}=O\left(\frac{1}{|z-1|^2}\right).$$

The function $f(z)=a(z-1)^2h(z)$ has a bounded derivative and satisfies the condition $f(0)=1$ for a suitable constant a.

2. The rest of the paper will be devoted to the proof of the second part of theorem 1. We first introduce some notations. Let $D(f,g)$ be the mixed DIRICHLET integral,

$$D(f,g)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}f'(z)\overline{g'(z)}\,dx\,dy\,,\qquad z=x+i\,y;$$

we write $D(f)=D(f,f)$. Let C denote the subclass of D of functions satisfying condition (C). We define

$$M=M(z_1,z_2,\ldots)=\inf_{f\in C}D(f)\quad(\leq\infty)$$

and make the convention that $M=\infty$ if C is void. We shall need a new representation of M which we formulate in the following theorem.

Theorem 2. *For a given sequence* $\{z_\nu\}$ *such that* $\sum_{1}^{\infty}(1-|z_\nu|)<\infty$ *let*

$$F(\Theta)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\Theta}-z_\nu|^2}.$$

If we define $M^*=M^*(z_1,z_2,\ldots)\,(\leq\infty)$ *by*

$$M^*=\inf_{g\in D}I(g)=\inf_{g\in D}\left\{D(g)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\Theta)\,|g(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta\right\},\tag{4}$$

$$g(0)=\left\{\prod_{1}^{\infty}|z_\nu|\right\}^{-1},$$

then $M=M^*$.

Let us first assume that the sequence $\{z_\nu\}_1^n$ is finite. A function $f(z)$ in C can be written

$$f(z)=\prod_{1}^{n}\frac{z-z_\nu}{1-z\,\bar z_\nu}\,g(z)=\frac{z-z_1}{1-z\,\bar z_1}\,g_1(z)=h_1(z)\,g_1(z),$$

where $|g(z)|=|g_1(z)|$ for $|z|=1$. If we assume that $g'(z)$ is continuous on $|z|=1$, a partial integration shows that

$$\begin{aligned}D(f,f)&=\frac{-i}{2\pi}\int_{|z|=1}\overline{f(z)}\,df(z)=\frac{-i}{2\pi}\int_{|z|=1}\bar g_1\,\bar h_1(h_1\,dg_1+g_1\,dh_1)\\&=\frac{-i}{2\pi}\int_{|z|=1}\bar g_1\,dg_1-\frac{i}{2\pi}\int_{|z|=1}|g_1|^2\,\frac{dh_1}{h_1}.\end{aligned}$$

Since

$$\frac{dh_1(z)}{h_1(z)} = i\,\frac{1-|z_1|^2}{|1-e^{i\Theta}\bar{z}_1|^2}\,d\Theta, \qquad z = e^{i\Theta},$$

and $|g| = |g_1|$ on $|z| = 1$, this yields

$$D(f) = D(g_1) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\Theta}-z_1|^2}\,|g(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta.$$

This formula then holds for an arbitrary function g in D. We use the same argument on the function g_1, and finally obtain the desired formula for the finite sequence $\{z_\nu\}$.

Let us now consider the general case and suppose first that M is finite. There exists an extremal function in the class C, i.e. a function f for which $D(f) = M$, and

$$f(z) = g(z)\prod_1^\infty \frac{z_\nu - z}{1-z\bar{z}_\nu}\,\frac{\bar{z}_\nu}{z_\nu} = g_n(z)\,\pi_n(z),$$

where $\pi_n(z)$ is the product with $1 \leqq \nu \leqq n$. The above argument yields

$$D(f) = D(g_n) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\Theta}-z_\nu|^2}\,|g(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta.$$

If we observe that $\lim_{n=\infty} D(g_n) \geqq D(g)$, we obtain the inequality $M^* \leqq M$. Suppose that $I(g^*) \leqq M^* + \delta$, $\delta > 0$, where g^* belongs to D and $g^*(0) = \left\{\prod_1^\infty |z_\nu|\right\}^{-1}$. Then if $f_n(z) = \pi_n(z)\,g^*(z)$, we obtain

$$D(f_n) = D(g^*) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\Theta}-z_\nu|^2}\,|g^*(e^{i\Theta})|^2\,d\Theta.$$

Hence $M \leqq \lim_{n=\infty} D(f_n) \leqq M^* + \delta$. If we let $\delta \to 0$, we get $M \leqq M^*$, and so $M = M^*$.

Conversely, if M^* is finite, the last part of the above proof gives $M \leqq M^*$. Thus M is finite and theorem 2 is proved.

3. The proof that condition (2) is sufficient depends on the following potential-theoretic lemma.

Lemma 1. *Let $I_1, I_2, \ldots, I_\nu, \ldots$ be a sequence of closed subintervals of (0, 1), which may have common points, and suppose that their lengths a_ν decrease to zero. Suppose furthermore that there is a sequence $\{l_\nu\}$ such that $l_\nu \geqq 1$ and*

(5)
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l_\nu^2}{\log\dfrac{1}{a_\nu}} < \infty.$$

Then, for every $n \geqq 1$, there exists a potential $U_n(x)$,

$$U_n(x) = \int_0^1 \log\frac{1}{|x-t|}\,d\sigma_n(t), \quad \sigma_n \geqq 0,$$

such that $U_n(x) \geq l_\nu$ *for* x *in* I_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *and such that*

$$J(U_n) = \int_0^1 \int_0^1 \log \frac{1}{|x-t|}\, d\sigma_n(x)\, d\sigma_n(t) < A,$$

where A *is independent of* n.

We prove this by induction. We use the notation $b_\nu = \dfrac{l_\nu}{a_\nu \log \dfrac{1}{a_\nu}}$ and choose

$$U_1(x) = K b_1 \int_{I_1} \log \frac{1}{|x-t|}\, dt.$$

For a suitable constant K, which may be chosen independently of a_1, $U_1(x) \geq l_1$ for $x \in I_1$. Suppose that $U_{n-1}(x)$ is constructed, $n \geq 2$, and choose

$$U_n(x) = U_{n-1}(x) + \alpha \int_{I_n} \log \frac{1}{|x-t|}\, dt,$$

where α is a constant to be determined later. This means that σ_n, for every n, is concentrated on the intervals I_ν, $\nu \leq n$. Since a_ν is a decreasing sequence, there exists a constant λ such that if $U_{n-1}(x) \geq \lambda\, l_n$ at one point of I_n, then $U_{n-1}(x) \geq l_n$ throughout I_n. We now distinguish two cases.

I. If $U_{n-1}(x) \geq \lambda\, l_n$ at one point of I_n, we choose $\alpha = 0$, so that $U_n(x) = U_{n-1}(x)$. This choice is permissible and we have $J(U_n) = J(U_{n-1})$.

II. If $U_{n-1}(x) < \lambda\, l_n$ for $x \in I_n$, we choose $\alpha = K b_n$. Evidently, $U_n(x) \geq U_{n-1}(x) \geq l_\nu$ for $x \in I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ and

$$U_n(x) \geq K b_n \int_{I_n} \log \frac{1}{|x-t|}\, dt \geq l_n \quad \text{for} \quad x \in I_n.$$

We now have to estimate $J(U_n)$:

$$J(U_n) = J(U_{n-1}) + \alpha^2 \int_{I_n} \int_{I_n} \log \frac{1}{|x-t|}\, dx\, dt + 2\alpha \int_{I_n} U_{n-1}(x)\, dx.$$

Hence, if e.g. $a_n < \frac{1}{3}$,

$$J(U_n) \leq J(U_{n-1}) + 3\alpha^2 a_n^2 \log \frac{1}{a_n} + 2\alpha\, \lambda\, l_n\, a_n.$$

If we insert the value of α, we find that there exists a constant C such that

$$J(U_n) \leq J(U_{n-1}) + C \frac{l_n^2}{\log \dfrac{1}{a_n}}.$$

Thus, if

$$J(U_{n-1}) \leq C \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{l_\nu^2}{\log \dfrac{1}{a_\nu}}$$

(which is certainly true for $n=2$ if C is large enough) the same inequality holds for $J(U_n)$, and the lemma follows from assumption (5).

4. Let us now assume that (2) holds. In the interval $(0, 2\pi)$, considered on the unit circle, we exclude intervals I_ν around Θ_ν of lengths $a_\nu^{\frac{1}{3}}$, $a_\nu = 1 - r_\nu$. For every n, there exists by lemma 1 a potential $U_n(\Theta)$ such that

$$U_n(\Theta) \geq \log\log\frac{1}{a_\nu}, \quad \Theta \in I_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

and

$$J(U_n) < A.$$

In particular, the total mass of σ_n is bounded. Let $h_n(z)$ be an analytic function in $|z|<1$ whose real part on $|z|=1$ equals $U_n(\Theta)$, and form

$$g_n(z) = e^{-h_n(z)}.$$

Then

$$|g_n(e^{i\Theta})| \leq \left\{\log\frac{1}{a_\nu}\right\}^{-1}, \quad \Theta \in I_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{6}$$

$$|g_n(0)| \geq a > 0; \tag{7}$$

$$D(g_n) < A'; \tag{8}$$

here a and A' are independent of n. Furthermore, the functions $g_n(z)$ are uniformly bounded.

In view of theorem 2, we can establish the sufficiency of condition (2) by proving that

$$B_n = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{1-r_\nu^2}{|e^{i\Theta} - z_\nu|^2} |g_n(e^{i\Theta})|^2 \, d\Theta$$

is bounded independently of n. Let A_1 and A_2 be the integrals of the ν-th term of the sum over the intervals I_ν and $(0, 2\pi) - I_\nu$, respectively. Then, from (6) we infer that

$$A_1 \leq \left\{\log\frac{1}{a_\nu}\right\}^{-2} \int_0^{2\pi} \frac{1-r_\nu^2}{|e^{i\Theta} - z_\nu|^2} \, d\Theta = 2\pi \left\{\log\frac{1}{a_\nu}\right\}^{-2},$$

and, since $|\Theta - \Theta_\nu| \geq a_\nu^{\frac{1}{3}}$ on $(0, 2\pi) - I_\nu$, we obtain $A_2 \leq \text{Const.}\, a_\nu^{\frac{1}{3}}$. Thus for all n we have

$$B_n \leq \text{Const.} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\left(\log\frac{1}{a_\nu}\right)^{-2} + a_\nu^{\frac{1}{3}}\right\} < \infty,$$

which proves our assertion.

5. To prove that (3) is necessary, we need the following lemma[2]).

Lemma 2. *If E is a closed set of positive capacity, there exists a sequence $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_0^\infty$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \to 0$, $\lambda_0 = 0$, such that the arithmetic sum*

[2]) A similar argument is used in L. Carleson: Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle. Acta Math. 87 (1952).

F of Λ and E, $F=\{x+\lambda_\nu,\ x\in E,\ \nu=0,1,2,\ldots\}$, is a set of uniqueness for the class D, i.e. if $f\in D$ and

$$\lim_{r\to 1} f(r e^{i\Theta})=0,\quad \Theta\in F,$$

wherever the limit exists, then $f(z)\equiv 0$.

Since E has positive capacity, there exists a distribution μ of unit mass on E with FOURIER-STIELTJES coefficients c_n such that $\sum |c_n|^2 |n|^{-1}<\infty$. With a given function $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ in D, we associate another function $\varphi(\zeta)$, $|\zeta|<1$, defined by

$$\varphi(\zeta)=\int_E f(\zeta e^{it})\,d\mu(t)=\sum_0^\infty A_n\zeta^n,$$

where $A_n=a_n\cdot c_{-n}$. Since $\sum n|a_n|^2<\infty$, the TAYLOR series of $\varphi(\zeta)$ converges absolutely on $|\zeta|=1$, and there exists a function $\omega(s)$ *which depends only on the sequence* $\{c_n\}$, such that

$$|\varphi(e^{ix})-\varphi(e^{iy})|\le \text{Const.}\,\omega(s),\quad |x-y|\le s,$$

and for which $\lim_{s\to 0}\omega(s)=0$. The function $\omega(s)$ being defined, we choose the sequence $\{\lambda_\nu\}$ so that the series $\sum_2^\infty l_\nu\log\omega(l_\nu)$ diverges, where $l_\nu=\lambda_{\nu-1}-\lambda_\nu$, $\nu\ge 2$.

If now $\lim_{r\to 1} f(re^{i\Theta})=0$ for $\Theta\in F$ wherever the limit exists, then it follows that $\varphi(e^{i\lambda_\nu})=0$, $\nu=0,1,2,\ldots$ Hence there is a constant M such that

$$|\varphi(e^{i\Theta})|\le M\,\omega(l_\nu),\quad \lambda_{\nu-1}\ge\Theta\ge\lambda_\nu,\ \nu\ge 2.$$

From this it follows that

$$\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\Theta})|\,d\Theta\le \text{Const.}+\log M\sum_2^\infty l_\nu+\sum_2^\infty l_\nu\log\omega(l_\nu)=-\infty.$$

This yields $\varphi(\zeta)\equiv 0$, and in particular $a_0=0$. If we use the same argument on $z^{-1}f(z)$, we obtain $a_1=0$ etc. and finally $f(z)\equiv 0$.

6. As before, let us set $a_\nu=\left\{\log\frac{1}{1-r_\nu}\right\}^{-1}$ to simplify the notations and let us assume that the series $\sum a_\nu^{1+\varepsilon}$ diverges for some $\varepsilon>0$. If $N(t)$ denotes the number of a_ν's such that $a_\nu>t$, then

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\,t^{1+\delta}N(t)=\infty,\quad 0<\delta<\varepsilon.$$

We choose a CANTOR set E of positive capacity[3]) and denote by E_n the set obtained after n steps in the construction of E. E_n consists of m_n intervals of lengths $\exp\left(-\frac{1}{\varrho_n}\right)$. The numbers ϱ_n and m_n may be assumed

[3]) For the connection between CANTOR sets and capacity, see R. NEVANLINNA: Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936, p. 145ff.

to satisfy the following conditions:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \varrho_n^{1+\delta} N(\varrho_n) = \infty \quad \text{for some} \quad \delta > 0 \tag{9}$$

$$\lim_{n=\infty} m_n \varrho_n^{1+\delta'} = 0, \quad 0 < \delta' < \delta. \tag{10}$$

We associate with E a sequence $\{\lambda_\nu\}$ and a set F such that the conclusion of lemma 2 is valid. Let $E_n^{(\nu)}$ be the set E_n after translation by λ_ν. Let n_i be a sequence of integers to be determined later. We choose for Θ_k the midpoints of the intervals which constitute the sets E_{n_i}, $E_{n_i}^{(1)}, \ldots, E_{n_i}^{(p_i)}$, where p_i is the largest index that can be chosen when we assume $\varrho_{n_i} < a_k \leqq \varrho_{n_{i-1}}$. On account of (9) and (10), $p_i \to \infty$ if the sequence $n_i \to \infty$ rapidly enough and $\lim_{i\to\infty} \varrho_{n_i}^{1+\delta} N(\varrho_{n_i}) = \infty$.

Let us now suppose that $f(z_k) = 0$ for some $f \in D$. If Θ belongs to F, there are an infinity of numbers z_k such that

$$\frac{1 - |z_k|}{|e^{i\Theta} - z_k|} \geqq \frac{1}{2}.$$

Since $|f'(z)| = o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $|z| \to 1$, we infer that

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\Theta}) = 0, \quad \Theta \in F.$$

By our choice of $\{\lambda_\nu\}$, this implies $f(z) \equiv 0$, and theorem 1 is completely proved.

We remark that our methods yield better conditions than (2) and (3). We have, however, preferred not to push them further as we wish to keep the proofs reasonably simple. We also observe that it is an easy consequence of theorem 2 that the class C may be empty even if $\sum(1-|z_\nu|)$ converges. We need only use the fact that the series defining $F(\Theta)$ may diverge for every Θ if only $\sum(1-|z_\nu|)^{\frac{1}{2}}$ diverges. To obtain this result it is therefore unnecessary to use the above argument which however gives the much sharper result of theorem 1.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 296—311 (1952).

Stetige Abbildungen topologischer Räume auf endliche abstrakte Komplexe.

Von

Wolfhart Zimmermann in Göttingen.

Einleitung.

In Arbeiten von FREUDENTHAL[1]) und ALEXANDROFF[2]) wurde gezeigt, daß sich jede kompakte Teilmenge T des R_n als Limesraum eines inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ abstrakter Komplexe darstellen läßt. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit für die Homologietheorie der kompakten Teilmengen des R_n, da die inverse Limesbildung sich als geeignetes Mittel erweist, einige topologische Eigenschaften dieser Räume auf die Eigenschaften der abstrakten Komplexe zurückzuführen. Ersetzt man nämlich in dem Spektrum $\mathfrak{S}$ jeden Komplex durch seine Homologiegruppe, und jede Projektion durch den entsprechenden Homomorphismus, so entsteht ein inverses Spektrum von Homologiegruppen, dessen Limesgruppe von der gewählten Darstellung des Raumes T unabhängig ist, also eine topologische Invariante von T ist. Es gelingt so, die Homologieeigenschaften der Komplexe — also spezieller topologischer Räume, die kombinatorischen Methoden leicht zugänglich sind — vermöge der inversen Limesbildung auf die kompakten Teilmengen des R_n zu übertragen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, dieses Verfahren auf *alle* Räume R auszudehnen, die sich als Limesräume inverser Spektren auffassen lassen, so daß die Homologietheorie dieser Räume als eine „Fortsetzung" der Homologietheorie der abstrakten Komplexe erscheint.

Zur Erreichung dieses Zieles ist es zweckmäßig, den Begriff der „stetigen Abbildung eines topologischen Raumes auf einen abstrakten Komplex" in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu stellen, und zwar aus folgendem Grund: Die Gesamtheit aller stetigen Abbildungen eines beliebigen topologischen Raumes auf abstrakte Komplexe läßt sich in einem inversen Spektrum, dem „*Abbildungsschema*" von R, zusammenfassen, welches zum Ausdruck bringt, wie R durch die Möglichkeit stetiger Abbildung zur Gesamtheit der abstrakten Komplexe in Beziehung gesetzt ist. So erlaubt z. B. das Abbildungsschema zu entscheiden, wann ein topologischer Raum als Limesraum eines inversen Spektrums abstrakter Komplexe dargestellt werden kann.

---

[1]) FREUDENTHAL, H.: Über die R_n-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. Proc. Acad. Amsterdam **38**, 414—418 (1935).

[2]) ALEXANDROFF, P.: Untersuchung über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. Ann. of Math. (2) **30**, 101—187 (1928).

Ein zweiter wichtiger Begriff ist das *topologische Gebilde*, seine Bedeutung geht wohl am besten aus der nun folgenden Inhaltsübersicht hervor.

Die „Vorbemerkungen" enthalten Definition und einfachste Eigenschaften inverser Spektren topologischer Räume.

In Abschnitt I wird das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ als ein topologischer Raum R definiert, in welchem eine Basis $\mathfrak{B}$ des Systems der offenen Mengen ausgezeichnet ist, die mit je zwei Mengen auch deren Durchschnitt und Vereinigung enthält. Die Begriffe stetige Abbildung, topologische Abbildung, inverses Spektrum, und Limesgebilde eines inversen Spektrums werden ganz analog wie für topologische Räume definiert.

In Abschnitt II wird gezeigt, daß die Begriffe „stetige Abbildung eines topologischen Gebildes auf einen abstrakten Komplex" und „endliche offene (abgeschlossene) Überdeckung eines topologischen Gebildes" äquivalent sind.

Mit Hilfe des Abbildungsschemas, das als inverses Spektrum abstrakter Komplexe, gebildet aus allen stetigen Abbildungen eines topologischen Gebildes auf abstrakte Komplexe, definiert ist, wird in Abschnitt III folgendes bewiesen:

1. Jeder T_0-Raum R kann in den Limesraum des Abbildungsschemas eines seiner topologischen Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ eingebettet werden (Satz 2).

2. Ein topologisches Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ ist dann und nur dann Limesgebilde eines inversen Spektrums abstrakter Komplexe, wenn $(R, \mathfrak{B})$ dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph ist (Satz 3 und 4).

3. Ist $\mathfrak{S}$ ein inverses Spektrum topologischer Gebilde, in welchem jedes Gebilde dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph ist, so ist auch das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$ dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph (Satz 5).

Mit Hilfe dieser Sätze wird in Abschnitt IV gezeigt, wie die Homologie- bzw. Cohomologietheorie derjenigen topologischen Gebilde, die sich als Limesgebilde inverser Spektren abstrakter Komplexe darstellen lassen, in eindeutiger Weise aus der Homologie- bzw. Cohomologietheorie der abstrakten Komplexe hervorgeht.

Im letzten Abschnitt wird der Übergang von topologischen Gebilden zu topologischen Räumen durch folgenden „Invarianzbeweis" vollzogen: Ist R Limesraum eines inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ abstrakter Komplexe, und $(R, \mathfrak{B})$ ein topologisches Gebilde, welches Limesgebilde eines inversen Spektrums abstrakter Komplexe ist (z. B. das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$), so ist die nach IV erklärte n-te Homologiegruppe des Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ unabhängig von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$, also eine topologische Invariante von R.

Ist allgemein R ein beliebiger topologischer Raum und $(L, \mathfrak{L})$ das Limesgebilde des Abbildungsschemas von R, so kann die n-te Homologiegruppe von $(L, \mathfrak{L})$ dem Raum R als n-te Homologiegruppe zugesprochen

werden. Diese ist aber gerade der von ČECH eingeführten n-ten Homologiegruppe von R isomorph, womit die Brücke zur Homologietheorie von ČECH geschlagen ist.

Vorbemerkungen.

Ein *inverses Spektrum* $\mathfrak{S}$ topologischer Räume[3]) ist durch folgende Bestimmungsstücke definiert[4]):

1. Die Indexmenge I von $\mathfrak{S}$.

2. Eine Ordnungsrelation $\leq$ in I, welche transitiv und reflexiv ist, und außerdem folgende Bedingung erfüllt: Zu je zwei Indizes $\alpha \in I$ und $\beta \in I$ gibt es einen Index $\gamma \in I$ mit $\gamma \geq \alpha$ und $\gamma \geq \beta$.

(Dabei kann auch der Fall $\alpha \geq \beta$, $\beta \geq \alpha$, $\alpha \neq \beta$ eintreten, siehe dazu Punkt 3 und 4.)

3. Eine Familie $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit I als Indexmenge. Ist $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$, so sei $R_\alpha \approx R_\beta$[5]).

4. Zu je zwei Indizes $\alpha \geq \beta$ gehört eine Familie von stetigen Abbildungen $(\pi_i)_{i \in I(\alpha, \beta)}$ von R_α in R_β, die Familie der *Projektionen*. Ist $\alpha \geq \beta$ und $\beta \geq \alpha$, so gehöre mindestens eine topologische Abbildung von R_α auf R_β zu den Projektionen von α in β.

Ein inverses Spektrum $\mathfrak{S}'$ [mit der Indexmenge I', der Ordnungsrelation $\leq'$, der Familie $(R'_\alpha)_{\alpha \in I'}$ topologischer Räume und den Projektionen $(\pi'_i)_{i \in I(\alpha, \beta)}$] heißt ein Teilspektrum des inversen Spektrums $\mathfrak{S}$, wenn

$$I' \subset I$$

ist, die Ordnung $\leq'$ durch die Ordnung $\leq$ in I' induziert wird,

$$R'_\alpha = R_\alpha \qquad (\alpha \in I')$$

und für $\alpha \geq \beta$, $\alpha \in I'$, $\beta \in I'$:

$$(\pi'_i)_{i \in I'(\alpha, \beta)} = (\pi_i)_{i \in I(\alpha, \beta)}$$

ist.

Ein Teilspektrum $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ heißt vollständig, wenn es zu jedem $\alpha \in I$ ein $\alpha' \in I'$ gibt mit

$$\alpha' \geq \alpha.$$

Ein inverses Spektrum heißt einfach, wenn es für jedes Indexpaar $\alpha \geq \beta$ nur eine Projektion von α in β gibt. Diese Projektion wollen wir mit $\pi_{\alpha\beta}$ bezeichnen.

Die Definition des Limesraums eines inversen Spektrums benötigen wir nur für einfache Spektren: Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches inverses Spektrum, so besteht der Limesraum $R = \varprojlim \mathfrak{S}$ aus allen Familien $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$, mit

$$p_\alpha \in R_\alpha \quad \text{und} \quad p_\alpha = \pi_{\beta\alpha} p_\beta \quad \text{für} \quad \beta \geq \alpha.$$

[3]) Zu allen Grundbegriffen der Topologie vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I, Berlin 1935 und N. BOURBAKI, Topologie générale, Paris 1940.

[4]) Zur Definition der Spektren topologischer Räume und Gruppen vgl. J. BRACONNIER, Spectres d'espaces. Portugaliae Math. 7, 93—111 (1948).

[5]) $R_\alpha \approx R_\beta$ bedeutet: R_α und R_β sind homöomorph.

Die Topologie von R sei die am wenigsten feine, für welche jede Abbildung f_α von R in R_α stetig ist, wenn f_α durch

$$f_\alpha\{(p_\alpha)_{\alpha\in I}\} = p_\alpha$$

definiert ist.

$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien einfache, inverse Spektren topologischer Räume, die ein-eindeutige Abbildung h der Indexmenge $I(\mathfrak{S})$ *auf* die Indexmenge $I(\mathfrak{T})$ heißt eine Isomorphie von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{T}$, wenn es zu jedem Index $\alpha\in I(\mathfrak{S})$ eine topologische Abbildung a_α von R_α auf $R_{h\alpha}$ gibt, so daß für jedes Indexpaar

$$\pi_{h\alpha,\,h\beta} = a_\beta \circ \pi_{\alpha\beta} \circ a_\alpha^{-1}$$

ist.

Gibt es eine Isomorphie von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{T}$, so sind offenbar die Limesräume von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ homöomorph:

$$\varprojlim \mathfrak{S} \approx \varprojlim \mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien einfache, inverse Spektren mit den Indexmengen $I(\mathfrak{S})$ und $I(\mathfrak{T})$, I' eine Teilmenge von $I(\mathfrak{T})$, dann induziert $\mathfrak{T}$ in der Menge I' ein inverses Teilspektrum $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$. Die eindeutige Abbildung k von $I(\mathfrak{S})$ *in* $I(\mathfrak{T})$ mit der Bildmenge $I' = kI(\mathfrak{S})$ heiße eine kanonische Abbildung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$, wenn k das Spektrum $\mathfrak{S}$ *auf* das Spektrum $\mathfrak{T}'$ isomorph abbildet.

Eine kanonische Abbildung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ definiert eine stetige Abbildung s von $\varprojlim \mathfrak{T}$ in $\varprojlim \mathfrak{S}$: Ist $p = (p_\alpha)_{\alpha\in I(\mathfrak{T})}$ ein Punkt von $\varprojlim \mathfrak{T}$, so sei der Bildpunkt von p

$$s\,p = (q_\alpha)_{\alpha\in I(\mathfrak{S})}$$

durch

$$q_\alpha = p_{k\alpha}$$

festgelegt. Es ist nun leicht nachzuprüfen, daß s tatsächlich stetig ist.

In den beiden folgenden Fällen haben die Spektren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ bekanntlich homöomorphe Limesräume:

1. Ist $\mathfrak{S}'$ vollständiges Teilspektrum eines einfachen inversen Spektrums $\mathfrak{S}$, so folgt:

$$\varprojlim \mathfrak{S}' \approx \varprojlim \mathfrak{S}.$$

2. $\mathfrak{S}$ sei ein einfaches, inverses Teilspektrum mit der Indexmenge I und der Ordnungsrelation $\leq$. Die Ordnungsrelation $\leq'$ in I sei Teilordnung von $\leq$, d.h. aus $\alpha \leq' \beta$ folgt stets $\alpha \leq \beta$. Außerdem existiere zu jedem Indexpaar α, β ein Index γ mit $\gamma \geq' \alpha$ und $\gamma \geq' \beta$. Dann induziert $\mathfrak{S}$ in der Indexmenge I mit der Ordnung $\leq'$ ein Spektrum $\mathfrak{S}'$ mit $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$ als Familie topologischer Räume und den Projektionen

$$\pi_{\alpha\beta} \qquad (\alpha\in I,\ \beta\in I,\ \alpha\geq'\beta)$$

und es ist:

$$\varprojlim \mathfrak{S} \approx \varprojlim \mathfrak{S}'.$$

Außer in Abschnitt V ist, wenn von inversen Spektren topologischer Räume die Rede ist, immer vorausgesetzt, daß sie einfach sind und jede Projektion $\pi_{\alpha\beta}$ eine Abbildung von R_α *auf* R_β ist.

I. Topologische Gebilde.

Definition 1. *Ein topologisches Gebilde* $(R, \mathfrak{B})$ *besteht aus einem topologischen Raum* R *und einem System* $\mathfrak{B}$ *offener Mengen in* R *mit folgenden Eigenschaften:*

1. Aus $U_1 \in \mathfrak{B}$ und $U_2 \in \mathfrak{B}$ folgt $U_1 \cup U_2 \in \mathfrak{B}$ und $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{B}$.

2. Jede offene Menge in R ist Vereinigungsmenge einer Mengenfamilie aus $\mathfrak{B}$.

Die Mengen des Systems $\mathfrak{B}$ heißen $\mathfrak{B}$-offen. Die Komplementärmenge einer $\mathfrak{B}$-offenen Menge heißt $\mathfrak{B}$-abgeschlossen. Die Gesamtheit $\tilde{\mathfrak{B}}$ der $\mathfrak{B}$-abgeschlossenen Mengen genügt den beiden Bedingungen:

1. Aus $U_1 \in \tilde{\mathfrak{B}}$ und $U_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}$ folgt $U_1 \cap U_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}$ und $U_1 \cup U_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}$.

2. Jede abgeschlossene Menge in R ist Durchschnitt einer Mengenfamilie aus $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Hat R nur endlich viele Punkte, so gibt es zu R nur *ein* topologisches Gebilde, nämlich $(R, \mathfrak{O}(R))$, wenn $\mathfrak{O}(R)$ das System aller offenen Mengen von R bezeichnet.

Eine Abbildung f eines topologischen Raumes R' in einen Raum R heißt eine stetige Abbildung des topologischen Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$, wenn das Urbild jeder $\mathfrak{B}'$-offenen Menge $\mathfrak{B}$-offen ist. Nach dieser Definition ist jede stetige Abbildung von $(R', \mathfrak{B}')$ in $(R, \mathfrak{B})$ eine stetige Abbildung von R' in R und jede stetige Abbildung von R' in R eine stetige Abbildung von $(R', \mathfrak{O}(R'))$ in $(R, \mathfrak{O}(R))$, wenn $\mathfrak{O}(R)$ das System aller offenen Mengen von R bezeichnet.

Eine ein-eindeutige und umkehrbar-stetige Abbildung f des topologischen Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ auf das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ heißt eine topologische Abbildung von $(R', \mathfrak{B}')$ auf $(R, \mathfrak{B})$. $(R', \mathfrak{B}')$ und $(R, \mathfrak{B})$ nennen wir in diesem Fall homöomorph: $(R', \mathfrak{B}') \approx (R, \mathfrak{B})$.

Definition 2. *Ein inverses Spektrum* $\mathfrak{S}$ *topologischer Gebilde hat folgende Bestimmungsstücke:*

1. Ein inverses Spektrum $\mathfrak{S}$ topologischer Räume.

[Wir bezeichnen die zu $\mathfrak{S}$ gehörige Familie topologischer Räume mit $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ und die Projektion von α in β mit $\pi_{\alpha\beta}$.]

2. Eine Familie $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha \in I}$ topologischer Gebilde, für welche die Abbildung $\pi_{\alpha\beta}$ $(\alpha \geqq \beta)$ von R_α in R_β eine stetige Abbildung von $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ in $(R_\beta, \mathfrak{B}_\beta)$ ist.

Das Limesgebilde $(R, \mathfrak{B}) = \varprojlim \mathfrak{S}$ eines inversen Spektrums topologischer Gebilde ist so erklärt: R ist der Limesraum des inversen Spektrums $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{B}$ besteht aus allen Teilmengen U von R, zu welchen es ein

$\alpha \in I$ und eine offene Menge V von R_α gibt mit

$$U = f_\alpha^{-1} V.$$

Nach Definition des Limesraumes R erfüllt $(R, \mathfrak{B})$ die Eigenschaften (1) und (2) eines topologischen Gebildes.

Die in den Vorbemerkungen angegebenen Eigenschaften inverser Spektren lassen sich ohne weiteres auf inverse Spektren topologischer Gebilde übertragen.

Jedes inverse Spektrum $\mathfrak{S}$ topologischer Räume läßt sich auf triviale Weise zu einem Spektrum topologischer Gebilde ergänzen: Jeder Raum $R_\varkappa$ wird einfach durch das topologische Gebilde $(R_\alpha, \mathfrak{O}(R_\alpha))$ ersetzt, und die Projektionen $\pi_{\varkappa\beta}$ bleiben ungeändert. Ist $\mathfrak{S}$ ein Spektrum endlicher Räume, so ist dies offenbar die einzige Erweiterungsmöglichkeit.

II. Komplexe und Überdeckungen.

Definition 3. *Ein (endlicher) abstrakter Komplex K ist ein beliebiges endliches System endlicher Mengen. Die Elemente von K heißen Simplexe von K, die Elemente der Simplexe von K heißen Eckpunkte von K.*

Ein abstrakter Komplex ist durch die Relation $<$ teilweise geordnet. Zu $<$ gehört eine Rechtstopologie $\mathcal{T}_0$ und eine Linkstopologie $\mathcal{T}_a$. Die entsprechenden topologischen Räume nennen wir K_0 und K_a.

Eine Abbildung h eines abstrakten Komplexes L in den Komplex K ist dann und nur dann eine stetige Abbildung von L_0 in K_0 bzw. von L_a in K_a, wenn aus $t_1 < t_2$ stets folgt: $h t_1 < h t_2$[6]).

Ist K ein abstrakter Komplex, so bezeichne $\overline{K}$ denjenigen Komplex, der aus allen Mengen s besteht, welche in wenigstens einem Simplex von K enthalten sind. Ist h eine stetige Abbildung des Komplexes L_0 in den Komplex K_0, so sei die Abbildung $\overline{h}$ von $\overline{L}$ in $\overline{K}$ folgendermaßen definiert: Ist $\bar{s}$ Simplex von $\overline{L}$, so werde $\bar{s}$ der Durchschnitt

$$\bar{t} = \bigcap_{s \supset \bar{s}} h\, s$$

zugeordnet, in welchem s alle Simplexe von L durchläuft, welche $\bar{s}$ enthalten. $\overline{h}$ ist eine stetige Abbildung von $\overline{L}_0$ in $\overline{K}_0$.

Definition 4. *Eine endliche offene Überdeckung eines topologischen Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{B}$-offener Mengen, deren Indexmenge endlich und deren Vereinigungsmenge*

$$\bigcup_{i \in I} U_i = R$$

ist.

Wir wollen jetzt einen ein-eindeutigen Zusammenhang zwischen den stetigen Abbildungen eines Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ auf abstrakte Komplexe K_0

[6]) Vgl. hierzu Alexandroff, P.: Diskrete Räume. Rec. math. Moscou (2) **2**, 501—519 (1937).

einerseits und den endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$ andererseits herstellen.

g sei eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ auf K_0. Die zu g gehörige endliche offene Überdeckung $\mathfrak{U}_g$ erklären wir folgendermaßen: Jedem Eckpunkt $a \in \mathfrak{K}$[7]) ordnen wir die (offene) Menge $U(a)$ von K_0 zu, welche aus allen Simplexen s mit $a \in s$ besteht. Jeder Menge $U(a)$ ordnen wir die $\mathfrak{B}$-offene Menge $g^{-1}U(a)$ zu und erhalten so mit

$$\mathfrak{U}_g = \{g^{-1}U(a)\}_{a \in \mathfrak{K}}$$

eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$. Der Nerv von $\mathfrak{U}_g$ ist dem Komplex $\overline{K}$ isomorph.

Umgekehrt sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$. Die zu $\mathfrak{U}$ gehörige stetige Abbildung $g_{\mathfrak{U}}$ von $(R, \mathfrak{B})$ auf einen abstrakten Komplex K_0 erklären wir folgendermaßen: $g_{\mathfrak{U}}$ sei diejenige Abbildung von R in den Nerven $N(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$, welche jedem $p \in R$ die Menge aller $U_i (i \in I)$ zuordnet, die p enthalten. $g_{\mathfrak{U}}$ ist eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ in $N(\mathfrak{U})$ und eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ *auf* $K = g_{\mathfrak{U}} R \subset N(\mathfrak{U})$. Die Überdeckung $\mathfrak{U}_{g_{\mathfrak{U}}}$ ist der Überdeckung $\mathfrak{U}$ isomorph[8]), ebenso ist die Abbildung g zur Abbildung $g_{\mathfrak{U}_g}$ äquivalent, der Zusammenhang $\mathfrak{U} \to g_{\mathfrak{U}}$ zwischen den endlichen offenen Überdeckungen und den stetigen Abbildungen topologischer Gebilde auf abstrakte Komplexe K_0 ist also ein-eindeutig.

Ein genau entsprechender Zusammenhang besteht zwischen den stetigen Abbildungen von $(R, \mathfrak{B})$ auf Komplexe K_a und den endlichen abgeschlossenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$.

Zu je zwei Überdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ von $(R, \mathfrak{B})$ definieren wir eine Überdeckung $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ von $(R, \mathfrak{B})$: Ihre Indexmenge sei $I \times J$ und jedem Indexpaar (i, j) sei die Menge $U_i \cap V_j$ zugeordnet. Die Operation $\times$ ist kommutativ und assoziativ. $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ sei diejenige Abbildung von $N(\mathfrak{W})$ in $N(\mathfrak{U})$, für welche das Simplex $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} t$ aus allen $U_i (i \in I)$ besteht, zu welchen es ein $W_q \in t$ gibt mit $W_q \subset U_i$.

Nach Definition hat $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ folgende Eigenschaft:

Satz 1. *Sind* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{V}$ *zwei endliche offene Überdeckungen eines topologischen Gebildes* $(R, \mathfrak{B})$ *und* $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$, *so gilt:*

$$g_{\mathfrak{U}} = g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} \circ g_{\mathfrak{W}}.$$

$g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ *ist eine stetige Abbildung von* $g_{\mathfrak{W}} R$ *auf* $g_{\mathfrak{U}} R$.

Analog definiert man $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ und $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ für endliche abgeschlossene Überdeckungen.

---

[7]) $\mathfrak{K}$ sei die Menge aller Eckpunkte von K.

[8]) Zwei Überdeckungen heißen isomorph, wenn sich die Indexmengen so aufeinander ein-eindeutig beziehen lassen, daß entsprechenden Indizes die gleiche offene Menge zugeordnet ist.

III. Das Abbildungsschema.

Wir wollen die Gesamtheit der stetigen Abbildungen eines topologischen Gebildes $(R, \mathfrak{B})$ auf abstrakte Komplexe K_0 in einem inversen Spektrum zusammenfassen. Um mengentheoretische Schwierigkeiten von vorneherein auszuschließen, beschränken wir uns auf ganz bestimmte Komplexe: Wir denken uns eine abzählbar unendliche Menge von Dingen $E = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, bilden die Menge B aller abstrakten Komplexe, deren sämtliche Eckpunkte aus E stammen und kommen überein unter abstrakten Komplexen künftig nur Komplexe aus B zu verstehen. B_0 bezeichne die Menge aller mit Rechtstopologie versehenen Komplexe aus B, B_a die Menge aller mit Linkstopologie versehenen Komplexe aus B.

Definition 5. *$(R, \mathfrak{B})$ sei ein topologisches Gebilde. Das Abbildungsschema von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 ist ein inverses Spektrum topologischer Räume mit folgenden Bestimmungsstücken:*

1. *Indexmenge I ist die Gesamtheit aller stetigen Abbildungen von $(R, \mathfrak{B})$ auf abstrakte Komplexe mit Rechtstopologie.*

2. *I sei durch die folgende Relation $\leq$ teilweise geordnet: Es sei $g' \geq g$, wenn es eine stetige Abbildung s von $g'R$ auf gR gibt, welche $g = s \circ g'$ erfüllt. (Nach Satz 1 gibt es zu je zwei Abbildungen $g_1 \in I$ und $g_2 \in I$ eine Abbildung g mit $g \geq g_1$ und $g \geq g_2$.)*

3. *Jeder Abbildung g wird als topologischer Raum der abstrakte Komplex gR (mit Rechtstopologie) zugeordnet.*

4. *Ist $g' \geq g$, so sei die stetige Abbildung s mit $g = s \circ g'$ von $g'R$ auf gR Projektion von g' in g. (Die Abbildung s ist eindeutig bestimmt, denn g und g' sind Abbildungen auf gR und $g'R$, weshalb aus $g = s_1 \circ g'$ und $g = s_2 \circ g'$ die Gleichheit $s_1 = s_2$ folgen muß.)*

Analog lautet die Definition des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_a.

Nach Abschnitt I können wir das Abbildungsschema ebensogut als inverses Spektrum topologischer Gebilde auffassen.

Entsprechend dem ein-eindeutigen Zusammenhang zwischen endlichen Überdeckungen und stetigen Abbildungen auf abstrakte Komplexe führen wir jetzt das Abbildungsschema auf ein inverses Spektrum von Überdeckungsnerven zurück:

Das *Schema der endlichen offenen Überdeckungen des topologischen Gebildes* $(R, \mathfrak{B})$ definieren wir[9]) durch die Bestimmungsstücke:

1. Indexmenge J sei die Menge aller endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$.

2. Es sei $\mathfrak{W} >' \mathfrak{U}$, wenn es eine Überdeckung $\mathfrak{V}$ gibt, so daß $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ ist. (Die Relation $<'$ ist transitiv, da $\times$ assoziativ ist.)

[9]) Analog definiert man das Schema der endlichen abgeschlossenen Überdeckungen.

3. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U} \in J$ wird der Komplex $g_{\mathfrak{U}} R$ zugeordnet.

4. Ist $\mathfrak{W} >' \mathfrak{U}$, so sei $g_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}$ Projektion von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}$, so sei die identische Abbildung Projektion von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$.

Das Limesgebilde dieses Schemas ist homöomorph dem Limesgebilde des Abbildungsschemas. Denn ersetzt man in dem Abbildungsschema jede stetige Abbildung durch die entsprechende Überdeckung, so entsteht ein neues Spektrum mit der Indexmenge J und einer Ordnungsrelation $\leq$, welches in J mit der Teilordnung[10]) $\leq'$ von $\leq$ das Überdeckungsschema induziert.

s sei eine stetige Abbildung des topologischen Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in das topologische Gebilde $(R, \mathfrak{B})$. Die Abbildung k, welche jeder stetigen Abbildung f von $(R, \mathfrak{B})$ auf einen abstrakten Komplex die stetige Abbildung

$$g = f \circ s$$

von $(R', \mathfrak{B}')$ auf denselben Komplex zuordnet, ist eine kanonische Abbildung des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ in das Abbildungsschema von $(R', \mathfrak{B}')$, sie heißt die von s erzeugte kanonische Abbildung.

Es sei R ein beliebiger T_0-Raum, $\mathfrak{B}$ ein System offener Mengen von R mit den Eigenschaften 1 und 2 aus Definition 1. In welcher Beziehung steht nun R zu dem Limesraum des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$? Darüber gibt folgender Satz Auskunft:

Satz 2. *Ist R ein T_0-Raum, $(R, \mathfrak{B})$ ein topologisches Gebilde, L der Limesraum des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 oder der Limesraum des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_a, so kann R in L eingebettet werden.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall des Abbildungsschemas relativ zu B_0, der Beweis verläuft für B_a analog, wenn man nur sinngemäß das System $\mathfrak{B}$ durch das System der $\mathfrak{B}$-abgeschlossenen Mengen, Komplexe K_0 durch K_a und offene Überdeckungen durch abgeschlossene ersetzt.

1. Zuerst konstruieren wir eine ein-eindeutige Abbildung $\mathfrak{J}$ von R auf eine Teilmenge Q von L. Jedem $p \in R$ wird das durch

$$q_g = g\,p \qquad (g \in I)$$

definierte Element $\mathfrak{J}\,p$ von L zugeordnet. Es sei $Q = \mathfrak{J} R$.

Aus $p \neq q$ folgt $\mathfrak{J}\,p \neq \mathfrak{J}\,q$. Denn es gibt eine offene Menge $O \in \mathfrak{B}$, welche einen der beiden Punkte p, q nicht enthält. Sei $\mathfrak{U}$ eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{B})$, welche O enthält, so muß $g_{\mathfrak{U}}\,p \neq g_{\mathfrak{U}}\,q$, also $\mathfrak{J}\,p \neq \mathfrak{J}\,q$ sein. $\mathfrak{J}$ ist also eine ein-eindeutige Abbildung von R auf Q.

2. Wir zeigen, daß $\mathfrak{J}$ eine topologische Abbildung von R auf den Teilraum $Q < L$ ist. Die Topologie $\mathfrak{T}$ von R ist die am wenigsten feine, für welche jede Abbildung $g \in I$ stetig ist. Denn ist $\mathfrak{T}'$ eine weniger feine Topologie derselben Eigenschaft, O eine beliebige $\mathfrak{B}$-offene Menge und

[10]) Nach Satz 1 ist $\leq'$ Teilordnung von $\leq$.

$\mathfrak{U}$ eine endliche offene Überdeckung von $(R, \mathfrak{V})$, welche O enthält, dann muß die Abbildung $g_{\mathfrak{U}}$ nach Voraussetzung auch für $\mathcal{T}'$ stetig sein. Das bedeutet aber, daß O auch für $\mathcal{T}'$ eine offene Menge ist. Also ist, da O beliebig aus B gewählt wurde, $\mathcal{T}=\mathcal{T}'$.

Andererseits ist aber nach Definition des Limesraumes die Topologie S von Q die am wenigsten feine Topologie, für welche jede Abbildung f_g stetig ist.

Wegen

$$g = f_g \circ \mathfrak{J}$$

muß $\mathfrak{J}$ eine topologische Abbildung sein.

Besonderes Interesse verdienen nun solche Räume, zu welchen ein System $\mathfrak{V}$ mit der Eigenschaft $R \approx L$ existiert. Es wird sich herausstellen, daß Räume dieser Art — in ihrer Gesamtheit — durch inverse Limesbildung aus den abstrakten Komplexen gewonnen werden können.

Zur Vermeidung mengentheoretischer Widersprüche müssen wir uns aber zunächst — ähnlich wie bei den Komplexen — auf eine wohldefinierte Gesamtheit topologischer Räume festlegen.

Wir denken uns eine Menge M beliebig, aber ein für allemal fest vorgegeben und betrachten die Menge $\mathfrak{M}$ aller Räume, deren Punkte aus M stammen. Zu dieser Menge $\mathfrak{M}$ nehmen wir noch die Mengen B_0 und B_a aller abstrakten Komplexe hinzu und erhalten so einen Vorrat $\mathfrak{P}$ topologischer Räume, der je nach Wahl der Mächtigkeit α von M bis auf Homöomorphie alle topologischen Räume enthält, deren Mächtigkeit α nicht übersteigt. Wir kommen überein, unter topologischen Räumen künftig nur Räume aus $\mathfrak{P}$ zu verstehen und lassen nur solche topologischen Gebilde $(R, \mathfrak{V})$ zu, für welche R aus $\mathfrak{P}$ stammt.

Eine beliebige Menge topologischer Räume bzw. topologischer Gebilde nennen wir einen Bereich. Ein Bereich B heißt inverse Basis eines Bereichs Ω, wenn jeder Raum von Ω dem Limesraum eines inversen Spektrums über B[11]) homöomorph ist und jeder Limesraum eines inversen Spektrums über B zu Ω gehört. Ein Bereich Ω heißt invers abgeschlossen, wenn jeder Limesraum eines inversen Spektrums über Ω auch zu Ω gehört.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{T}$ ein inverses Spektrum abstrakter Komplexe mit Rechtstopologie (bzw. Linkstopologie) und $(R, \mathfrak{V})$ das Limesgebilde von $\mathfrak{T}$, dann ist $(R, \mathfrak{V})$ dem Limesgebilde des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{V})$ relativ zu B_0 (bzw. B_a) homöomorph.*

Beweis. Wir beweisen, daß das Spektrum $\mathfrak{T}$ vollständiges Teilspektrum des Abbildungsschemas relativ B_0 ist[12]).

Sei g eine stetige Abbildung von $(R, \mathfrak{V})$ auf einen abstrakten Komplex K_0 und $(U_i)_{i \in I}$ die offene Überdeckung $\mathfrak{U}_g$ von $(R, \mathfrak{V})$. Zu jedem

[11]) Das heißt ein inverses Spektrum, dessen topologische Räume zu B gehören.

[12]) Dieser Beweis, sowie die Beweise von Satz 4, 5 und 6 sind nur für den Bereich B_0 geführt, da die entsprechenden Beweise für B_a analog verlaufen.

Index $i \in I$ gibt es in der Indexmenge von $\mathfrak{T}$ einen Index $\gamma(i)$, für welchen eine offene Menge $O_i \in K_{\gamma(i)}$ existiert mit $U_i = f_{\gamma(i)}^{-1} O_i$. Wir denken uns zu jedem Überdeckungselement U_i von $\mathfrak{U}_g$ einen Index $\gamma(i)$ ausgewählt. Wir bestimmen nun in der Indexmenge von $\mathfrak{T}$ einen Index γ, der größer ist als alle $\gamma(i)$ $(i \in I)$. In $K_{\gamma 0}$ gibt es zu jedem U_i eine offene Menge Q_i mit

$$U_i = f_\gamma^{-1} Q_i.$$

Die identische Abbildung von I auf sich bildet die Überdeckung $\mathfrak{U}_g = (U_i)_{i \in I}$ isomorph auf die Überdeckung $(Q_i)_{i \in I}$ von $K_{\gamma 0}$ ab. Also existiert eine stetige Abbildung s von $K_{\gamma 0}$ auf K_0, welche $g = s \circ f_\gamma$ erfüllt, womit gezeigt ist, daß $\mathfrak{T}$ vollständiges Teilspektrum des Abbildungsschemas ist.

Definition 6. *Ω_0 (bzw. Ω_a) bezeichne den Bereich aller topologischen Gebilde $(R, \mathfrak{B})$, welche mit dem Limesgebilde ihres Abbildungsschemas relativ zu B_0 (bzw. B_a) homöomorph sind. Ebenfalls bezeichnen wir mit Ω_0 (bzw. Ω_a) den Bereich aller topologischen Räume R, zu welchen ein topologisches Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ existiert, welches Ω_0 (bzw. Ω_a) angehört.*

Satz 4. *B_0 ist eine Basis von Ω_0. B_a ist eine Basis von Ω_a.*

Beweis. Wir fassen B_0 und Ω_0 als Bereiche topologischer Gebilde auf. Ist $\mathfrak{Z}$ ein inverses Spektrum abstrakter Komplexe mit Rechtstopologie, so gehört das Limesgebilde von $\mathfrak{Z}$ nach Satz 3 zu Ω_0. Ist $(R, \mathfrak{B})$ ein Gebilde aus Ω_0, so muß nach Definition $(R, \mathfrak{B})$ homöomorph dem Limesgebilde des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0 sein.

Der Satz gilt natürlich ebenso, wenn B_0 und Ω_0 als Bereiche topologischer *Räume* aufgefaßt werden.

Satz 5. *Die Bereiche Ω_0 und Ω_a sind invers abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{Z}$ ein inverses Spektrum topologischer Gebilde über Ω_0, I seine Indexmenge. $(R, \mathfrak{B})$ sei das Limesgebilde von $\mathfrak{Z}$.

Wir greifen aus der Indexmenge J des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0 eine Teilmenge J' heraus: Sie bestehe aus all den stetigen Abbildungen g von R auf abstrakte Komplexe, die sich in der Form

$$g = s \circ f_\alpha \qquad (\alpha \in I)$$

darstellen lassen, in welcher s eine stetige Abbildung von $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ auf einen abstrakten Komplex ist. Diese Menge J' definiert ein Teilspektrum $\mathfrak{A}'$ des Abbildungsschemas. Seinen Limesraum bezeichnen wir mit $(L, \mathfrak{L})$.

$(R, \mathfrak{B})$ und $(L, \mathfrak{L})$ sind homöomorph. Zum Beweis dieser Behauptung stellen wir zunächst die Eigenschaften der Punkte von L und R fest:

Die Punkte von R sind als Familien

$$(p_\alpha)_{\alpha \in I} \qquad p_\alpha \in R_\alpha$$

definiert, welche für jedes Paar $\alpha > \beta$ die Relation

$$p_\alpha = \pi_{\beta\alpha} p_\beta \tag{1}$$

erfüllen.

Die Punkte von L sind als Familien

$$(q_g)_{g \in J'} \qquad q_g \subset g\,L$$

definiert, welche

$$q_g = r_{hg}\, q_h \tag{2}$$

erfüllen, wenn

$$g = r_{hg} \circ h$$

ist und r_{hg} eine stetige Abbildung von hR auf gR ist.

Jedem Punkt $p = (p_\alpha)_{\alpha \in I} \subset R$ ordnen wir einen Punkt $\mathfrak{J}\, p = (q_g)_{g \in J'}$ von L zu durch

$$q_g = s\, p_\alpha,$$

wenn $g = s \circ f_\alpha$ ist ($\alpha \in I$, s stetige Abbildung von R_α auf $gR = sR_\alpha$).

q_g ist von der gewählten Zerlegung $g = s \circ f_\alpha$ unabhängig und $(q_g)_{g \in J'}$ erfüllt Bedingung (2).

Umgekehrt sei $q = (q_g)_{g \in J'}$ ein Punkt von L. Wir definieren zu q einen Punkt $\mathfrak{J}' q = (p_\alpha)_{\alpha \in I}$ von R:

p_α soll derjenige Punkt von R_α sein, welcher für jede stetige Abbildung s von R_α auf einen Komplex sR_α

$$s\, p_\alpha = q_g \qquad (g = s \circ f_\alpha)$$

erfüllt. $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ existiert, da $(R_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ dem Limesgebilde seines Abbildungsschemas homöomorph ist, und (q_g) Bedingung (2) gehorcht.

Offenbar ist $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^{-1}$, $\mathfrak{J}$ ist also eine ein-eindeutige Abbildung von R *auf* L.

$\mathfrak{J}$ ist aber auch eine topologische Abbildung von $(R, \mathfrak{B})$ auf $(L, \mathfrak{L})$. Um das zu beweisen, vergleichen wir die Systeme $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}^{-1}\,\mathfrak{L}$ offener Mengen in R:

Zu jeder $\mathfrak{B}$-offenen Menge U von R gibt es einen Index $\alpha \in I$ und eine offene Menge O von R_α, so daß

$$U = f_\alpha^{-1} O$$

ist. Zu O wiederum gibt es eine stetige Abbildung s von R_α auf einen abstrakten Komplex sR_α und eine offene Menge V von sR_α, so daß

$$O = s^{-1} V$$

und somit

$$U = (s \circ f_\alpha)^{-1} V \tag{3}$$

ist. $\mathfrak{B}$ besteht aus allen Mengen U, die sich in der Form (3) darstellen lassen.

Zu jeder $\mathfrak{J}^{-1}\,\mathfrak{L}$-offenen Menge in R gibt es eine stetige Abbildung $g \in J'$ von R auf einen abstrakten Komplex gR, so daß

$$U = g^{-1} V$$

ist. Zu g gibt es einen Index $\alpha \in I$ und eine stetige Abbildung s von R_α auf $gR = sR_\alpha$ mit

$$g = s \circ f_\alpha,$$

so daß

$$U = (s \circ f_\alpha)^{-1} V \tag{4}$$

ist. Also ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^{-1}\,\mathfrak{L}$, und $\mathfrak{J}$ eine topologische Abbildung.

IV. Direkte und inverse Gruppenfunktionen.

Definition 7. *Eine inverse (direkte) Gruppenfunktion F über einem Bereich B topologischer Gebilde ordnet jedem topologischem Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ aus B eine Gruppe $F(R, \mathfrak{B})$ und jeder stetigen Abbildung s eines Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in ein Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ einen Homomorphismus $F(s)$ von $F(R', \mathfrak{B}')$ in $F(R, \mathfrak{B})$ (bzw. einen Homomorphismus von $F(R, \mathfrak{B})$ in $F(R', \mathfrak{B}')$) zu, der folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Aus $s = s_1 \circ s_2$ folgt $F(s) = F(s_1) \circ F(s_2)$ bzw. $F(s) = F(s_2) \circ F(s_1)$.*
2. *Ist s eine topologische Abbildung, so ist $F(s)$ eine Isomorphie.*
3. *Aus $s_1 \approx s_2$ folgt $F(s_1) \approx F(s_2)$*[13]*.*

F liefert zu jedem inversen Spektrum $\mathfrak{S}$ über B ein inverses Gruppenspektrum $F(\mathfrak{S})$ mit folgenden Bestimmungsstücken[14]):

1. und 2. Die Indexmenge von $F(\mathfrak{S})$ und deren Ordnung stimmen mit der Indexmenge I von $\mathfrak{S}$ und deren Ordnung überein.

3. Dem Index $\alpha \in I$ wird die Gruppe $F(R_\alpha)$ zugeordnet.

4. Für jedes Indexpaar $\alpha \geqq \beta$ aus I ist $F(\pi_{\alpha\beta})$ Projektion von α in β.

Ist k eine kanonische Abbildung des inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ über B in das inverse Spektrum $\mathfrak{T}$ über B, also auch kanonische Abbildung von $F(\mathfrak{S})$ in $F(\mathfrak{T})$, so bezeichne $F(k)$ den zu k gehörigen Homomorphismus von $\varprojlim F(\mathfrak{T})$ in $\varprojlim F(\mathfrak{S})$.

Eine Gruppenfunktion F über B heißt stetig, wenn

1. für jedes inverse Spektrum $\mathfrak{S}$ über B, dessen Limesgebilde zu B gehört[15]),

$$F(\varprojlim \mathfrak{S}) \approx \varprojlim F(\mathfrak{S})$$

ist,

2. für jede kanonische Abbildung k eines inversen Spektrums $\mathfrak{S}$ über B ($\varprojlim \mathfrak{S} \subset B$)[15]) in ein inverses Spektrum $\mathfrak{T}$ über B ($\varprojlim \mathfrak{T} \in B$)[15]) die

[13]) s_1 sei eine stetige Abbildung des Raumes R_1' in den Raum R, s_2 eine stetige Abbildung des Raumes R_2' in den Raum R. s_1 heißt äquivalent zu s_2, in Zeichen $s_1 \approx s_2$, wenn es eine topologische Abbildung J' von R_1' auf R_2' und eine topologische Abbildung J von R auf R_2 gibt, so daß $s_2 = J \circ s_2 \circ J'^{-1}$ ist: Analog für topologische Gebilde und Gruppen.

[14]) Diese Definition wenden wir im letzten Abschnitt auch auf nichteinfache Spektren an.

[15]) Diese Bedingung ist überflüssig, falls B abgeschlossen ist.

zugehörige Abbildung s von $\varprojlim \mathfrak{T}$ in $\varprojlim \mathfrak{S}$ die Bedingung

$$F(s) \approx F(k)$$

erfüllt.

Satz 6. *Jede inverse (direkte) Gruppenfunktion über B_0 (bzw. B_a) läßt sich bis auf Isomorphie auf eine und nur eine Weise in eine stetige inverse (direkte) Gruppenfunktion über Ω_0 (bzw. Ω_a) fortsetzen.*

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß eine inverse Gruppenfunktion F über B_0 nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden kann:

Jedes Gebilde $(R, \mathfrak{B})$ aus Ω_0 ist dem Limesgebilde des Abbildungsschemas $\mathfrak{A}$ von $(R, \mathfrak{B})$ relativ zu B_0 homöomorph. Also muß $F(R, \mathfrak{B})$ der Limesgruppe des inversen Spektrums $F(\mathfrak{A})$ isomorph sein.

s sei eine stetige Abbildung des Gebildes $(R', \mathfrak{B}')$ in das Gebilde $(R, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$ seien die Abbildungsschemen von $(R', \mathfrak{B}')$ und $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0. s definiert eine kanonische Abbildung k von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$, welche ihrerseits eine stetige Abbildung h von $\varprojlim \mathfrak{A}'$ in $\varprojlim \mathfrak{A}$ hervorruft, deren Homomorphismus $F(h)$ nach Bedingung (2) durch $F(k)$ bis auf Äquivalenz festgelegt ist. Wegen $s \approx h$ folgt aber $F(s) \approx F(h)$, womit die Eindeutigkeit von F bis auf Isomorphie in allen Stücken bewiesen ist.

Wir müssen noch zeigen, daß die durch

$$F(R, \mathfrak{B}) = \varprojlim F(\mathfrak{A}),$$
$$F(s) = F(k)$$

definierte inverse Gruppenfunktion über Ω_0 tatsächlich stetig ist:

$\mathfrak{S}$ sei ein inverses Spektrum über Ω_0, $(R, \mathfrak{B})$ das Limesgebilde von $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{A}$ sei das Abbildungsschema von $(R, \mathfrak{B})$ relativ B_0, $\mathfrak{A}'$ und $(L, \mathfrak{L})$ haben im folgenden dieselbe Bedeutung wie im Beweis von Satz 5. Dann ist nach Definition von $\mathfrak{A}'$:

$$\varprojlim F(\mathfrak{A}') \approx \varprojlim F(\mathfrak{S}).$$

Da nach dem Beweis von Satz 3 $\mathfrak{A}'$ vollständiges Teilspektrum des Abbildungsschemas $\mathfrak{A}$ ist, folgt:

$$\varprojlim F(\mathfrak{A}') \approx \varprojlim F(\mathfrak{A}) = F(R, \mathfrak{B}).$$

Also ist

$$\varprojlim F(\mathfrak{S}) \approx F(R, \mathfrak{B}).$$

Ebenso einfach beweist man die Stetigkeit von F für jede stetige Abbildung s.

Der entsprechende Beweis für direkte Gruppenfunktionen verläuft analog.

Definition 8. *Wir erklären eine inverse Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^0$ (eine direkte Gruppenfunktion $\tilde{\mathfrak{H}}_n^0$) über dem Bereich $B_0 (n \geqq 1)$. $\mathfrak{H}_n^0(K_0)$ $(\tilde{\mathfrak{H}}_n^0(K_0))$ sei durch die in der üblichen Weise eingeführte n-te Homologiegruppe (Cohomologiegruppe) des Komplexes $\bar{K}$ gegeben. Ist s eine stetige Abbildung des abstrakten Komplexes L_0 in den abstrakten Komplex K_0, so*

sei $\mathfrak{H}_n^0(s)$ $(\widetilde{\mathfrak{H}}_n^0(s))$ *der durch* $\bar{s}$ *hervorgerufene Homomorphismus von* $\mathfrak{H}_n^0(L_0)$ *in* $\mathfrak{H}_n^0(K_0)$ *(von* $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^0(K_0)$ *in* $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^0(L_0)$*)* [16].

Diese inverse Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^0$ über B_0 (direkte Gruppenfunktion $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^0$ über B_0) läßt sich nach Satz 6 in eindeutiger Weise in eine stetige Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^0$ (direkte Gruppenfunktion $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^0$) über dem Bereich Ω_0 fortsetzen. Ist $(R, \mathfrak{B})$ ein Gebilde aus Ω_0, so nennen wir $\mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B})$ die n-te Homologiegruppe von $(R, \mathfrak{B})$.

Das gleiche gilt für die Bereiche B_a und Ω_a.

Damit sind zunächst nur Invarianten topologischer Gebilde gewonnen, es wird aber im nächsten Abschnitt bewiesen, daß für jeden Raum $R \in \Omega_0$ die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B})$ von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$ ganz unabhängig ist, womit dann die eigentliche topologische Invarianz der Homologiegruppen gezeigt ist.

V. Invarianz der Homologie- und Cohomologiegruppen.

Um die Invarianz der Homologiegruppen (Cohomologiegruppen) zu beweisen, nehmen wir das von Čech eingeführte Spektrum $\mathfrak{T}_0$ der endlichen offenen Überdeckungen eines topologischen Gebildes zu Hilfe. $\mathfrak{T}_0$ hat folgende Bestimmungsstücke:

1. Die Indexmenge J besteht aus allen endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$.

2. $\mathfrak{V}$ heißt Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, in Zeichen $\mathfrak{V} \geq'' \mathfrak{U}$, wenn es zu jedem Überdeckungselement V_i von $\mathfrak{V}$ ein Überdeckungselement U_j von $\mathfrak{U}$ gibt mit $V_i \subset U_j$.

3. Jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ wird ihr Nerv $N(\mathfrak{U})$ zugeordnet.

4. Für $\mathfrak{V} \geq'' \mathfrak{U}$ ist jede simpliziale Abbildung π von $N(\mathfrak{V})$ in $N(\mathfrak{U})$ mit $V \subset \pi V$ Projektion von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$.

Dieses Spektrum ist im allgemeinen nicht einfach, da in der Regel mehrere Projektionsmöglichkeiten existieren. Sein Limesraum ist im allgemeinen dem Limesraum des Abbildungsschemas *nicht* homöomorph. Jedoch ist das aus $\mathfrak{T}_0$ abgeleitete Gruppenspektrum $\mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{T}_0)$ einfach, da — nach einem bekannten Satz der kombinatorischen Topologie — der zu einer Projektion π gehörige Homomorphismus von der Wahl der Projektion π unabhängig ist.

Da aus $\mathfrak{V} \geq' \mathfrak{U}$ stets $\mathfrak{V} \geq'' \mathfrak{U}$ folgt, ist

$$\varprojlim \mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{T}_0) \approx \varprojlim \mathfrak{H}_n^0(\Xi) \quad (\Xi \text{ sei das Abbildungsschema relativ } B_0)$$

also

$$\varprojlim \mathfrak{H}_n^0(\mathfrak{T}_0) \approx \mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B}).$$

Satz 7. *Für jeden Raum* $R \in \Omega_0$ *ist* $\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})$ *vollständiges Teilspektrum von* $\mathfrak{T}(R, \mathfrak{O}(R))$.

Beweis. R ist als Limesraum eines inversen Spektrums endlicher Räume bikompakt, also gibt es zu jeder endlichen offenen Überdeckung

[16] Genau entsprechend lautet die Definition für die Bereiche B_a und Ω_a.

von $(R, \mathfrak{T}(R))$ unter den endlichen offenen Überdeckungen von $(R, \mathfrak{B})$ eine Verfeinerung.

Es ist also auch das Gruppenspektrum $\mathfrak{H}_n^0[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})]$ vollständiges Teilspektrum von $\mathfrak{H}_n^0[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{T}(R))]$, womit die Invarianz bewiesen ist:

Satz 8. *Ist R ein beliebiger topologischer Raum aus dem Bereich Ω_0, und sind $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ zwei topologische Gebilde aus Ω_0, so sind die n-ten Homologie- bzw. Cohomologiegruppen relativ B_0 von $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ isomorph. Die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_n^0(R, \mathfrak{B})$ ist also eine topologische Invariante von R.*

Wir beweisen den entsprechenden Satz für die Gruppenfunktion $\mathfrak{H}_n^a$:

Satz 8′. *Ist R ein beliebiger Raum aus dem Bereich Ω_a, und sind $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ zwei topologische Gebilde aus Ω_a, so sind die n-ten Homologie- und Cohomologiegruppen relativ zu B_a von $(R, \mathfrak{B})$ und $(R, \mathfrak{B}')$ isomorph.*

Beweis. Satz 7 gilt nicht in der analogen Form für abgeschlossene Überdeckungen. Wir müssen deshalb anders vorgehen: R ist bikompakt, also läßt sich aus jeder Familie abgeschlossener Mengen von R, deren Durchschnitt leer ist, eine endliche Teilfamilie auswählen, deren Durchschnitt ebenfalls leer ist. Da jede abgeschlossene Menge von R Durchschnitt einer Familie $\mathfrak{B}$-abgeschlossener Mengen ist, gibt es zu jeder endlichen abgeschlossenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $(R, \mathfrak{T}(R))$ eine endliche abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{U}'$ von $(R, \mathfrak{B})$, so daß $\mathfrak{U} \geqq'' \mathfrak{U}'$ ist und eine Projektion von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{U}'$ existiert, welche $N(\mathfrak{U})$ auf $N(\mathfrak{U}')$ isomorph abbildet. Ist ferner die endliche abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ und π eine Projektion von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$, so gibt es eine $\mathfrak{B}$-abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{V}'$ mit $\mathfrak{V} \geqq'' \mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}' \geqq'' \mathfrak{U}'$ und einer zu π äquivalenten Projektion π' von $\mathfrak{V}'$ in $\mathfrak{U}'$.

Die identische Abbildung von $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})]$ auf $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})] < \mathfrak{H}_n^a(R, \mathfrak{T}(R))$, aufgefaßt als kanonische Abbildung, bildet also die Limesgruppe von $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{T}(R))]$ isomorph auf die Limesgruppe von $\mathfrak{H}_n^a[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{B})]$ ab.

R sei ein beliebiger topologischer Raum, $(L, \mathfrak{L})$ das Limesgebilde des Abbildungsschemas von $(R, \mathfrak{T}(R))$ relativ B_0, dann können wir die n-te Homologiegruppe von $(L, \mathfrak{L}) \in \Omega_0$ als n-te Homologiegruppe $\mathfrak{H}_n^0(R)$ von R bezeichnen. Denn sie ist topologisch invariant und liefert für $R \in \Omega_0$ die durch Satz 8 erklärte n-te Homologiegruppe von R. $\mathfrak{H}_n^0(R)$ ist offenbar der von Čech eingeführten Homologiegruppe $\varprojlim \mathfrak{H}_n^0[\mathfrak{T}(R, \mathfrak{T}(R))]$ isomorph. Aus Satz 2 ergibt sich noch:

Satz 9. *Ein beliebiger T_0-Raum R läßt sich in einen bikompakten Raum L so einbetten, daß L und R isomorphe* Čech*-Homologiegruppen besitzen.*

(Eingegangen am 7. September 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 312—325 (1952).

Über reduzierte freie Liesche Ringe.

Von

Franz Wever in Mainz.

Einleitung.

§ 1. Es sei $\mathfrak{A}$ ein freier Ring aus k freien Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ über dem Körper der rationalen Zahlen als Koeffizientenbereich. In $\mathfrak{A}$ sollen beide assoziative Gesetze gelten, das kommutative nur bezüglich der Addition. Die Erzeugenden a_i sollen hinsichtlich der Multiplikation mit ihren Koeffizienten, aber nicht untereinander, vertauschbar sein. Ferner gelte das distributive Gesetz. $\mathfrak{A}$ heiße kurz *assoziativer Ring*.

In $\mathfrak{A}$ werde nun noch eine Liesche *Multiplikation* eingeführt durch

$$[r\,s] = r\,s - s\,r.$$

Alle Polynome in $\mathfrak{A}$, die sich allein durch Addition und diese Liesche Multiplikation aus den Erzeugenden mit rationalen Koeffizienten bilden lassen, sollen Liesche *Polynome* in $\mathfrak{A}$ heißen. In dem Modul $\mathfrak{L}$ aller Lieschen Polynome aus $\mathfrak{A}$ gelten die Identitäten

$$[r\,s] + [s\,r] = 0, \tag{1}$$

$$[[r\,s]\,t] + [[s\,t]\,r] + [[t\,r]\,s] = 0, \tag{2}$$

$$[r\,r] = 0. \tag{3}$$

Wie Magnus [1] gezeigt hat, kann $\mathfrak{L}$ dann bezüglich Addition und Liescher Multiplikation als ein freier Liescher Ring in den Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ angesehen werden. Die Bezeichnung „frei" soll dabei besagen, daß in $\mathfrak{L}$ keine weiteren Identitäten gelten als solche, die aus (1), (2) und (3) folgen.

Mit $\mathfrak{A}_m$ werde der Modul aller Polynome in $\mathfrak{A}$ bezeichnet, die homogen vom Grade m in den Erzeugenden sind, mit $\mathfrak{L}_m$ der Modul aller Lieschen Polynome in $\mathfrak{A}_m$. Im ersten Teil wird gezeigt, daß $\mathfrak{L}_m$ in $\mathfrak{A}_m$ durch Benutzung von Operatoren gebildet werden kann, die sich als Elemente des Gruppenringes $\mathfrak{s}_m$ der symmetrischen Gruppe von m Gegenständen deuten lassen, und zwar bilden diese Operatoren ein Rechtsideal Ω_m innerhalb der halbeinfachen Algebra $\mathfrak{s}_m$.

In $\mathfrak{L}$ werden nun auf folgende Weise *vollinvariante Ideale* definiert. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Ideal in $\mathfrak{L}$, d.h. mit p, q in $\mathfrak{M}$, liege auch $\lambda p + \mu q$ für rationale λ, μ in $\mathfrak{M}$ und mit p in $\mathfrak{M}$, w beliebig aus $\mathfrak{L}$, liege auch $[p\,w]$ in $\mathfrak{M}$. Es sei noch $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}_m$ für $m = 1, 2, \ldots$. Das Ideal $\mathfrak{M}$ heiße dann vollinvariant in $\mathfrak{L}$, wenn noch gilt:

(a) Jede lineare Transformation U der Erzeugenden von $\mathfrak{L}$ bildet jeden Teilmodul $\mathfrak{M}_m$ in sich ab, d.h., es ist $U\mathfrak{M}_m \subseteq \mathfrak{M}_m$.

(b) Jede homomorphe Abbildung S von $\mathfrak{L}$ bildet jeden Teilmodul $\mathfrak{M}_m$ in das von $\mathfrak{M}_m$ in $\mathfrak{L}$ erzeugte Ideal $\{\mathfrak{M}_m\}$ ab, d.h., es ist $S\,\mathfrak{M}_m \subseteq \{\mathfrak{M}_m\}$.

Der Faktorring $L \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ nach einem solchen vollinvarianten Ideal $\mathfrak{M}$ heiße dann ein *reduzierter freier* Liescher *Ring*.

Diese Definition ist handlich für die hier beabsichtigte Untersuchung. Sie läßt sich aber ersetzen durch eine andere, die Eigenschaften von L unmittelbar benutzt. Es sei $p(a_1, \ldots, a_k)$ ein Liesches Polynom aus $\mathfrak{L}$, das in einem vollinvarianten Ideal $\mathfrak{M}$ liege. Dann liegt wegen der Vollinvarianz von $\mathfrak{M}$ auch jedes Liesche Polynom $p(u_1, \ldots, u_k)$ in $\mathfrak{M}$, das aus $p(a_1, \ldots, a_k)$ entsteht, wenn die Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ von $\mathfrak{L}$ durch beliebige Elemente $u_1, \ldots, u_k$ aus $\mathfrak{L}$ ersetzt werden. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß im reduzierten freien Lieschen Ring $L \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ das Polynom $p(x_1, \ldots, x_k)$ für alle x_i aus L nur den Wert Null annimmt. Ein Polynom mit der Eigenschaft $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle x_i aus L heiße eine *Regel* in L. Die oben genannte Definition ist dann gleichbedeutend mit der folgenden: Ein Liescher Ring heißt reduziert frei, wenn jede Relation zwischen den Erzeugenden eine Regel ist.

Im zweiten Teil wird bewiesen, daß die Teilmoduln $\mathfrak{M}_m$ in $\mathfrak{L}_m$ für jedes m durch Operatoren aus $\mathfrak{s}_m$ gebildet werden können, die in einem Rechtsideal Ψ_m von $\mathfrak{s}_m$ liegen, das Unterideal von Ω_m ist.

Magnus [1] hat gezeigt, daß die freien Lieschen Ringe ein wirksames Hilfsmittel bei der Untersuchung freier Gruppen sind (siehe dazu auch Wever [2]). Baer [3] nennt eine Gruppe reduziert frei, wenn sie sich als Faktorgruppe einer freien Gruppe nach einer vollinvarianten Untergruppe darstellen läßt. Es sind dies also solche Gruppen, in denen jede Relation zwischen den Erzeugenden eine Regel (identische Relation) ist, wenn der Begriff der Regel entsprechend für Gruppen definiert wird. Diese Bezeichnung ist hier auf Liesche Ringe übertragen, da ein reduzierter freier Liescher Ring einer reduzierten freien Gruppe zugeordnet werden kann. Hierbei entspricht das vollinvariante Ideal gerade der vollinvarianten Untergruppe.

Die hier mitgeteilten Ergebnisse sind im Hinblick auf ihre gruppentheoretische Anwendbarkeit entstanden, die gruppentheoretischen Schlüsse sollen in dieser Arbeit jedoch nicht weiter ausgeführt werden. Eine kurze Bemerkung darüber befindet sich noch im Schlußabsatz.

Specht [4, 5] behandelt allgemein Ringe mit Regeln, die er „Gesetze" nennt. Einige der dort abgeleiteten Sätze decken sich mit den hier gefundenen; im folgenden ist darauf stets hingewiesen.

I. Freie Liesche Ringe.

§ 2. Die in der Einleitung angedeutete Konstruktion der Moduln $\mathfrak{L}_m$ des Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ innerhalb der Moduln $\mathfrak{A}_m$ des assoziativen Ringes $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von Operatoren soll jetzt ausführlich dargestellt werden.

Es sei Ξ_m die symmetrische Gruppe von der Ordnung $m!$ und σ_μ ($\mu = 1, \ldots, m!$) seien ihre Elemente, wobei $\varepsilon = \sigma_1$ stets die Identität bezeichne. Dann besteht der Gruppenring $\mathfrak{s}_m$ der symmetrischen Gruppe Ξ_m über dem Körper der rationalen Zahlen aus allen Linearverbindungen

$$\varrho = \sum_{\mu=1}^{m!} r_\mu \sigma_\mu, \qquad r_\mu \text{ rational}.$$

Es ist zweckmäßig, nichtkommutative Unbestimmte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ einzuführen. $\sigma(\xi) = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ bezeichne dann das Produkt der ξ_i in einer Reihenfolge, die die Permutation σ aus der Grundanordnung $\xi_1, \ldots, \xi_m$ durch Vertauschung der *Stellen* bewirkt. Zum Beispiel ist für $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ dieses Produkt $\sigma(\xi) = \xi_4\, \xi_1\, \xi_2\, \xi_3$. Der durch alle linear unabhängigen Produkte $\sigma_\mu(\xi)$, $\mu = 1, \ldots, m!$ erzeugte Modul werde mit Ξ_m bezeichnet. Jedes Polynom $p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ in Ξ_m ist dann eine Linearverbindung von Produkten der ξ_i, und zwar kommt jede Variable in jedem Summanden genau einmal vor. Zu jedem $p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ gehört eindeutig umkehrbar ein Operator φ aus $\mathfrak{s}_m$, so daß $p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \varphi(\xi)$. Allgemein bedeute $\varrho(\varphi(\xi)) = \varrho\varphi(\xi)$, $\mathfrak{s}_m$ ist damit als ein Ring von Stellenoperatoren auf Ξ_m erklärt. Wir schreiben dafür kurz

$$\Xi_m = \mathfrak{s}_m(\xi). \tag{4}$$

Der Modul $\mathfrak{A}_m$ entsteht aus Ξ_m, wenn die $\xi_1, \ldots, \xi_m$ in allen möglichen Anordnungen durch die Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ von $\mathfrak{A}$ ersetzt werden, wobei auch an die Stelle verschiedener ξ_i das gleiche a_j treten darf. Der Weg, über den ein bestimmtes Polynom in $\mathfrak{A}_m$ gebildet werden kann, ist dann natürlich nicht eindeutig festgelegt. Werden die Operatoren aus $\mathfrak{s}_m$ jetzt auch als Stellenoperatoren auf $\mathfrak{A}_m$ zugelassen, dann ist $\mathfrak{A}_m$ invariant gegenüber $\mathfrak{s}_m$, es ist

$$\mathfrak{s}_m(\mathfrak{A}_m) = \mathfrak{A}_m. \tag{5}$$

Nach Magnus [1] werden nun für jedes $m = 1, 2, \ldots$ Operatoren ω_m eingeführt, die einer mündlichen Mitteilung von Grün zu verdanken sind:

$$\omega_1 = \varepsilon,$$

$$\omega_2 = \varepsilon - \pi_2,$$

$$\ldots$$

$$\omega_m = (\varepsilon - \pi_m)(\varepsilon - \pi_{m-1}) \ldots (\varepsilon - \pi_2).$$

Darin steht π_h für den Zyklus $(1\ 2 \ldots h)$. Es ist dann

$$\omega_1(\xi) = \xi_1,$$

$$\omega_2(\xi) = \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1 = [\xi_1 \xi_2]$$

und für $m \geq 3$

$$\omega_m(\xi) = [\ldots [[\xi_1 \xi_2] \xi_3] \ldots \xi_m].$$

Das heißt, der Operator ω_m erzeugt, auf das Produkt $\xi_1, \ldots, \xi_m$ angewandt, gerade das Liesche Produkt der Unbestimmten ξ_i, in dem alle Klammern die ersten beiden der in der Reihenfolge ihrer Indizes hingeschriebenen Unbestimmten umschließen. Ein Produkt mit dieser Klammerung heiße *linksnormiert*, es soll für diesen Ausdruck auch die abgekürzte Schreibweise

$$\omega_m(\xi) = [\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m]$$

zugelassen sein. Allgemein bedeutet $\omega_m \varrho(\xi)$, worin ϱ einen beliebigen Operator aus $\mathfrak{s}_m$ bezeichnet, die Summe linksnormierter Produkte, die durch Anwendung von ω_m auf $\varrho(\xi)$ entsteht. Andererseits lassen sich bekanntlich alle Lieschen Produkte mit beliebiger Klammerung als Summen linksnormierter schreiben. Bezeichnen wir also mit Λ_m den Modul aller Lieschen Formen in Ξ_m und mit Ω_m das von ω_m in $\mathfrak{s}_m$ erzeugte Rechtsideal, dann ist

$$\Lambda_m = \Omega_m(\xi). \tag{6}$$

Entsprechend der Definition von Ξ_m enthält Λ_m alle Summen Liescher Produkte, die vom Grade m in den Unbestimmten ξ_i sind und in denen jede dieser Unbestimmten genau einmal vorkommt.

Der Liesche Modul $\mathfrak{L}_m$ aus $\mathfrak{A}_m$ entsteht, wenn nun noch in Λ_m die ξ_i in allen möglichen Anordnungen mit Wiederholungen durch die Erzeugenden a_j von $\mathfrak{A}$ ersetzt werden. Dies ist auch schon bei Wever [6] bewiesen, siehe dort Satz 2. Zu jedem Lieschen Polynom $f(a)$ aus $\mathfrak{L}_m$ gibt es danach ein Polynom $g(a)$ in $\mathfrak{A}_m$, so daß $f(a) = \omega_m g(a)$. Allgemein ist

$$\mathfrak{L}_m = \Omega_m(\mathfrak{A}_m). \tag{7}$$

Es würde genügen, statt (7) nur zu schreiben

$$\mathfrak{L}_m = \omega_m(\mathfrak{A}_m),$$

wie es in der eben zitierten Arbeit bewiesen ist und wie es auch aus (5) folgt. Es ist aber hier gerade der wesentliche Gedanke, nicht den Operator ω_m für sich zu betrachten sondern das von ihm in $\mathfrak{s}_m$ erzeugte Rechtsideal Ω_m. Werden alle Operatoren aus dem Rechtsideal Ω_m auf $\mathfrak{L}_m$ angewandt, also auf Polynome, die schon Liesche Polynome sind, dann wird dadurch $\mathfrak{L}_m$ in sich übergeführt, es ist

$$\Omega_m(\mathfrak{L}_m) = \mathfrak{L}_m. \tag{8}$$

Nach der zitierten Arbeit ist nämlich

$$(\omega_m)^2 = m \cdot \omega_m, \tag{9}$$

und das bedeutet, daß für jedes Liesche Polynom die Beziehung

$$\omega_m f(a) = m \cdot f(a)$$

gilt. Die Formel (9) ist mit anderen Hilfsmitteln auch von SPECHT [4] und DYNKIN [7] bewiesen worden.

Es soll jetzt für das von ω_m in $\mathfrak{S}_m$ erzeugte Rechtsideal Ω_m eine Basis angegeben werden. Es gilt

Satz 1: *Alle Produkte* $\omega_m \tau_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, (m-1)!)$, *worin die* τ_ν *alle Permutationen bedeuten, denen gegenüber die Stelle 1 festbleibt, bilden eine Basis von* Ω_m.

Daraus folgt sofort das

Corollar zu Satz 1: *Alle linksnormierten Produkte* $[\xi_1 \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_m}]$, *in denen die Unbestimmte* ξ_1 *an erster Stelle steht, bilden eine Basis von* Λ_m.

Der Beweis ist in einem allgemeineren Zusammenhang bereits von SPECHT [5] geführt worden, soll aber hier noch einmal allein durch Rechnung in $\mathfrak{S}_m$ wiederholt werden.

Der Operator ω_m sei geschrieben in der Form

$$\omega_m = \sum_{\mu=1}^{m!} l_\mu \sigma_\mu .$$

Als Koeffizienten l_μ treten dabei nur $0, \pm 1$ auf, und zwar ist der Koeffizient der Identität $l_1 = 1$. Von allen wirklich in ω_m vorkommenden Permutationen σ_μ, d. h. für die $l_\mu \neq 0$, ist ε die einzige Permutation, der gegenüber die Stelle 1 unverändert bleibt. Werden der Reihe nach alle Produkte $\omega_m \tau_\nu$, $\nu = 1, \ldots, (m-1)!$ hingeschrieben, so kommt in jedem dieser Produkte der Summand $\varepsilon \tau_\nu = \tau_\nu$ genau einmal vor. τ_ν kann aber in $\omega_m \tau_{\nu'}$, $\nu' \neq \nu$ nicht enthalten sein. Alle Produkte $\omega_m \tau_\nu$ sind also linear unabhängig. Die Gleichung (9) gestattet es, nach RUTHERFORD ([8], Satz 28) die Anzahl der linear unabhängigen η in $\mathfrak{S}_m$ mit $\omega_m \eta \neq 0$ anzugeben. ω_m/m ist idempotent und hat den Koeffizienten $1/m$ bei ε. Ω_m muß danach eine Basis vom Rang $(m-1)!$ haben und damit ist der Satz bewiesen.

§ 3. Der Gruppenring $\mathfrak{S}_m$ ist direkte Summe von minimalen Rechtsidealen. Es sei $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ mit $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_h > 0$ und $\sum \alpha_i = m$ eine *Zerlegung* von m in natürliche Zahlen. Dann gehören zu jeder Zerlegung α genau f^α Rechtsideale, die als lineare Moduln je den Rang f^α haben. Diese Ideale seien mit ${}^{(r)}\mathfrak{S}_m^\alpha$, $r = 1, 2, \ldots, f^\alpha$ bezeichnet. Jedes dieser Ideale vermittelt eine irreduzible Matrizendarstellung von $\mathfrak{S}_m$ vom Grade f^α, und zwar sind alle Darstellungen zur gleichen Zerlegung äquivalent. Ein kurzer Abriß dieser Darstellungstheorie findet sich bei VAN DER WAERDEN [9], § 129, eine ausführliche Darstellung, auf die hier zurückgegriffen wird, bei RUTHERFORD [8]. Die Zerlegung von $\mathfrak{S}_m$ in seine minimalen Rechtsideale ist bereits im Körper der rationalen Zahlen möglich, eine algebraische Erweiterung des Koeffizientenbereichs ist also nicht nötig. Darstellungstheoretisch stimmt das damit überein, daß die regulären Darstellungen einer symmetrischen Gruppe im Körper der rationalen Zahlen vollständig reduzibel sind.

Das von ω_m erzeugte Rechtsideal Ω_m ist direkte Summe von minimalen Rechtsidealen

$$\Omega_m = {}^{(r_1)}\mathfrak{s}_m^{\alpha} + {}^{(r_2)}\mathfrak{s}_m^{\alpha} + \cdots + {}^{(r_1)}\mathfrak{s}_m^{\alpha'} + \cdots . \tag{10}$$

Die Vielfachheit, mit der minimale Rechtsideale zur Zerlegung α auftreten, sei ν^{α}. Eine explizite Formel für ν^{α} ist nach Wever [2], Satz 5

$$\nu^{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{d,\, m} \mu(d)\, \chi^{\alpha}_{(d,\, d,\, \ldots,\, d)} . \tag{11}$$

Es wird summiert über alle Teiler d von m, $\mu(d)$ bedeutet die Möbiussche Funktion und $\chi^{\alpha}_{(d,\, d,\, \ldots,\, d)}$ den Charakter der Permutationen aus m/d Zyklen der Länge d in der Darstellung zur Zerlegung α.

Alle Permutationen τ_ν, $\nu = 1, \ldots, (m-1)!$ aus $\mathfrak{S}_m$, denen gegenüber die Ziffer 1 invariant ist, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_m$, die zu $\mathfrak{S}_{m-1}$ isomorph ist. Der durch alle τ_ν in $\mathfrak{s}_m$ aufgespannte Teilmodul heiße $\mathfrak{t}_{m-1}$, er bildet eine Unteralgebra von $\mathfrak{s}_m$, die zu $\mathfrak{s}_{m-1}$ isomorph ist. $\mathfrak{t}_{m-1}$ ist daher auch die direkte Summe von minimalen Rechtsidealen, die mit ${}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$ bezeichnet werden sollen. Sie sind gekennzeichnet durch Zerlegungen β von $m-1$, zu jeder Zerlegung durchläuft s die Werte $1, \ldots, f^{\beta}$.

Satz 1 kann daher auch durch die Gleichung

$$\Omega_m = \omega_m \mathfrak{t}_{m-1} \tag{12}$$

ausgedrückt werden, die besagt, daß durch Rechtsmultiplikation mit $\mathfrak{t}_{m-1}$ das Ideal Ω_m aus ω_m entsteht. Dieser Sachverhalt läßt sich ausnutzen, um für die ν^{α} noch eine andere Beziehung herzustellen.

Satz 2: *Für die Vielfachheiten ν^{α} der minimalen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$ zur Zerlegung α in Ω_m gilt das Gleichungssystem*

$$\sum_{\bar{\alpha} = \beta} \nu^{\alpha} = f^{\beta}$$

für alle Zerlegungen β von $m-1$. Für ein festes β ist dabei über alle α zu summieren, für die $\bar{\alpha}^i = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_h] = \beta$ mit $i = 1, \ldots, h$, $i \neq j$ für $\alpha_j = \alpha_{j+1}$. Für die ν^{α} gilt die Ungleichung

$$0 \leq \nu^{\alpha} \leq \operatorname{Min}(f^{\beta}) \quad \text{für alle } \beta = \bar{\alpha}^i .$$

Beweis: Satz 1 gestattet es, zu der Zerfällung (10) des Rechtsideals Ω_m in minimale Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$ noch eine Zerfällung

$$\Omega_m = \sum_{\beta,\, s} \omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1} \tag{13}$$

anzugeben. Auf der rechten Seite ist über alle β und für jedes β über alle s zu summieren. Die Zerfällung (13) bedeutet eine Verfeinerung von (10), denn jedes minimale Rechtsideal ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$ ist invariant gegenüber allen Rechtsoperatoren aus $\mathfrak{s}_m$ und damit erst recht auch denen aus $\mathfrak{t}_{m-1}$. Jedes ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\alpha}$, das in Ω_m liegt, ist also direkte Summe von Moduln

$\omega_m {}^{(r)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$, die in $\mathfrak{s}_m$ natürlich keine Rechtsideale mehr sind. Nach der Darstellungstheorie kann leicht ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Zerfällungen hergestellt werden. Jedes Rechtsideal ${}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_m$, das in Ω_m enthalten ist, zerfällt in Teilmoduln

$$(14) \qquad {}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_m = \sum_{\beta=\bar{\alpha}} \omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1},$$

und zwar ist auf der rechten Seite zu summieren über alle β, die aus dem festen α durch den Prozeß $\bar{\alpha}^i = \beta$, $i = 1, \ldots, h$ gewonnen werden können. Es sind der Reihe nach alle Summanden α_i von α um eins zu vermindern mit Ausnahme derjenigen, für die $\alpha_j = \alpha_{j-1}$ ist. Zu jedem so entstehenden $\beta = \bar{\alpha}^i$ gibt es genau einen Modul $\omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$, dessen s bestimmt werden kann. Rutherford ([8], Satz 15) zeigt nämlich, daß eine Matrix U^{α}_X, die ein Element X aus $\mathfrak{s}_m$ in einer Darstellung zur Zerlegung α darstellt, direkte Summe von Matrizes, geeignete Transformation vorausgesetzt,

$$U^{\alpha}_X = U^{\bar{\alpha}^1}_X + U^{\bar{\alpha}^2}_X + \cdots + U^{\bar{\alpha}^h}_X$$

ist, wenn X gegenüber eine Ziffer festbleibt. Die linearen Transformationen, die U_X bewirkt, entsprechen in $\mathfrak{s}_m$ einer Rechtsmultiplikation mit X. Geht man in (10) und (13) von den Darstellungen zu deren Graden über, so ergibt sich

$$\sum_{\alpha} \nu^{\alpha} f^{\alpha} = (m-1)!$$

und

$$\sum_{\beta} (f^{\beta})^2 = (m-1)!$$

Da jede Darstellung ${}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_m$ aus Ω_m zu jedem $\beta = \bar{\alpha}$ genau eine Darstellung $\omega_m {}^{(s)}\mathfrak{t}^{\beta}_{m-1}$ enthält, folgt daraus sofort die Behauptung. Die Ungleichung ist damit ebenfalls bewiesen, denn die ν^{α} können nach ihrer Definition nicht negativ sein.

Als Aussage über die Struktur des Rechtsideals Ω_m soll noch ein Satz angefügt werden.

Satz 3: *In Ω_m für $m \geqq 3$ kommen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{s}^{\alpha}_m$ mit $\alpha = [m-1, 1]$ und $\alpha = [2, 1, \ldots, 1]$ je genau einmal vor.*

Es ist nämlich $f^{\beta} = 1$ für $\beta = [m-1]$ und $\beta = [1, \ldots, 1]$. Die genannten Ideale können also höchstens einmal vorkommen. Sie müssen aber auch mindestens einmal auftreten, denn nach Wever ([6], Hilfssatz 1) können Rechtsideale zu den Zerlegungen $\alpha = [m]$ und $\alpha = [1, \ldots, 1]$ in Ω_m nicht vorkommen.

Satz 2 soll noch durch ein Beispiel erläutert werden. Für $m = 4$ hat das Gleichungssystem die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \nu^{[31]} &= f^{[3]} = 1, \\ \nu^{[31]} + \nu^{[22]} + \nu^{[211]} &= f^{[21]} = 2, \\ \nu^{[211]} &= f^{[111]} = 1. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten ν^{α} für $\alpha = [4]$ und $\alpha = [1, \ldots, 1]$ sind nach Satz 3 gleich Null und deshalb fortgelassen.

Aus den entsprechenden Gleichungen können die $\nu^\varkappa$ für alle $m \leqq 5$ berechnet werden. Bei $m > 5$ übersteigt die Anzahl der Unbekannten die Anzahl der Gleichungen. Es ist nicht untersucht, ob die Bestimmung der $\nu^\varkappa$ dann unter den Nebenbedingungen, ganz und nicht negativ zu sein und der Ungleichung aus Satz 2 zu gehorchen, eindeutig möglich ist.

§ 4. Der Übergang von Ξ_m zu $\mathfrak{A}_m$ beziehungsweise von A_m zu $\mathfrak{L}_m$ verlangt die Heranziehung der Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe $GL(k,R)$ des k-dimensionalen Vektorraumes. Wie bisher soll der Koeffizientenkörper der Körper R der rationalen Zahlen sein. k bezeichnet wie auch oben die Anzahl der Erzeugenden von $\mathfrak{A}$. Jede lineare Transformation $a = (a_{\varkappa,\lambda})$, $\varkappa, \lambda = 1, \ldots, k$ der Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ von $\mathfrak{A}$ induziert eine lineare Transformation $A(a) = (A_{\sigma,\varrho})$, $\varrho, \sigma = 1, \ldots, N$ der $N = k^m$ Basiselemente von $\mathfrak{A}_m$. Die Matrizes A bilden eine Darstellung der Matrizes a, diese Darstellung wird üblicherweise eine *Darstellung m-ter Stufe* von $GL(k,R)$ genannt, $\mathfrak{A}_m$ heißt dann auch Darstellungsmodul m-ter Stufe.

Einen ausführlichen Bericht über die Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppen findet man bei VAN DER WAERDEN [10] in § 22. Für die vorliegende Aufgabe ist es dabei wesentlich, daß die Gruppenalgebra $\mathfrak{g}_m$ ein wichtiges Hilfsmittel bei Aussagen über die Struktur der Darstellungsmoduln m-ter Stufe bildet. Danach ist die Darstellung m-ter Stufe der $GL(k,R)$ durch Matrizes $A(a)$ im allgemeinen nicht irreduzibel. $\mathfrak{A}_m$ zerfällt als Darstellungsmodul in irreduzible Darstellungsmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\varkappa(\mathfrak{A}_m)$, die bei allen linearen Transformationen in sich übergehen und keinen echten Untermodul mit dieser Eigenschaft enthalten. Sie lassen sich dadurch erzeugen, daß alle Operatoren eines minimalen Rechtsideals ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\varkappa$ aus $\mathfrak{g}_m$ als Stellenoperatoren auf $\mathfrak{A}_m$ angewendet werden. Es ist hier wieder wesentlich, daß die Aufspaltung der $\mathfrak{A}_m$ in irreduzible Darstellungsmoduln ohne algebraische Erweiterung von R möglich ist. Dabei ist noch zu bemerken, daß

$$ {}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\alpha(\mathfrak{A}_m) \equiv 0 \quad \text{mit } \alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_h], \quad h > k, $$

d. h., ein Rechtsideal ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\varkappa$ anulliert den Modul $\mathfrak{A}_m$, wenn die Anzahl h der positiven Summanden in α größer ist als die Anzahl k der Erzeugenden von $\mathfrak{A}$. Um alle irreduziblen Darstellungsmoduln in $\mathfrak{A}_m$ zu erhalten, genügt es also, sich auf die minimalen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\alpha$ aus $\mathfrak{g}_m$ zu beschränken, in deren Zerlegung höchstens k Summanden vorkommen.

Die Vielfachheit $\nu^\varkappa$ der minimalen Rechtsideale ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\alpha$ in Ω_m und die Vielfachheit ν'^α der irreduziblen Darstellungsmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^\alpha(\mathfrak{A}_m)$ in $\mathfrak{L}_m$ jeweils zur Zerlegung α stehen damit in einfacher Beziehung. Es ist

$$ \nu'^\alpha = \nu^\alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad \text{mit } h \leqq k $$

$$ \nu'^\alpha = 0 \quad \text{für alle } \alpha \quad \text{mit } h > k. $$

Da ${}^{(1)}\mathfrak{g}_m^{[1,1,\ldots,1]}$ in Ω_m nicht vorkommt, sind zur Bildung von $\mathfrak{L}_m$ für $m \leqq k-1$ immer alle minimalen Rechtsideale aus Ω_m nötig.

Corollar zu Satz 3: *In $\mathfrak{L}_m$ kommt ein irreduzibler Darstellungsmodul ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^{[m-1,1]}(\mathfrak{A}_m)$ immer genau einmal vor.* $(m \geqq 2)$.

Ein irreduzibler Darstellungsmodul ${}^{(r)}\mathfrak{g}_m^{[2,1,\ldots,1]}(\mathfrak{A}_m)$ kommt dann genau einmal vor, wenn $\mathfrak{A}$ wenigstens $k = m-1$ Erzeugende besitzt. $(m \geqq 3)$.

In Λ_m gibt es zu jedem Polynom $p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ genau einen Operator φ aus $\mathfrak{g}_m$, so daß $p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \omega_m \varphi(\xi)$. Dabei ist φ als eine Linearverbindung von Permutationen definiert, die als Stellenoperatoren wirken sollen. Ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}$$

eine Permutation der Ziffern $1, \ldots, m$, so bedeutet danach

$$\sigma(\xi) = \xi_{l_1} \xi_{l_2} \ldots \xi_{l_m}.$$

Der Übergang zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe verlangt, auch Permutationen der Variablen ξ_i zuzulassen, und zwar soll $\bar{\sigma}$: eine solche Substitution bezeichnen, durch die ξ_i in ξ_{k_i} übergeht. Dann ist

$$\bar{\sigma}\colon (\xi) = \xi_{k_1} \xi_{k_2} \ldots \xi_{k_m}.$$

Auf das Produkt $\xi_1, \ldots, \xi_m$ der Unbestimmten in ihrer natürlichen Reihenfolge haben also $\bar{\sigma}$: als Permutation der Variablen und σ^{-1} als Permutation der Stellen die gleiche Wirkung, es ist

$$\bar{\sigma}\colon (\xi) = \sigma^{-1}(\xi).$$

Allgemein gilt dann

$$\bar{\sigma}\colon p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \bar{\sigma}\colon \omega_m \varphi(\xi) = \omega_m \varphi\, \sigma^{-1}(\xi).$$

Das bedeutet aber, daß die Teilmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\chi}(\xi)$ nicht nur invariant gegenüber allen Stellenvertauschungen sondern auch gegenüber allen Permutationen der ξ_i sind.

II. Reduzierte freie Liesche Ringe.

§ 5. Die in dem ersten Teil entwickelte Darstellungstheorie der freien Lieschen Ringe soll jetzt dazu verwendet werden, um reduzierte freie Liesche Ringe zu konstruieren.

Es sei L ein reduzierter freier Liescher Ring, der bestimmt sei durch die Vorgabe der Anzahl k seiner Erzeugenden und eines Systems von Regeln $p^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Die linken Seiten dieser Regeln spannen das vollinvariante Ideal $\mathfrak{M}$ auf, wenn die x_i durch alle Elemente aus $\mathfrak{L}$ ersetzt werden. Es ergibt sich dann sofort

Satz 4: *Alle Regeln in einem reduzierten freien* Lieschen *Ring* $L \simeq \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ *lassen sich ersetzen durch ein System von Regeln*

$$\psi_m(\xi) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

d. h., es gibt zu jedem m *eine Regel* $\psi_m(\xi) = 0$, *deren linke Seite in* A_m *liegt, und aus der alle Regeln folgen, die in* $L_m \simeq \mathfrak{L}_m/\mathfrak{M}_m$ *gelten.*

Zum Beweis wird die Eigenschaft (a) des vollinvarianten Ideals $\mathfrak{M}$ benutzt; danach muß jeder Modul $\mathfrak{M}_m$ die direkte Summe von irreduziblen Darstellungsmoduln ${}^{(r)}\mathfrak{s}_m^{\varkappa}(\mathfrak{A}_m)$ sein, die in $\mathfrak{L}_m$ liegen. Dann gibt es aber ein Rechtsideal Ψ_m in $\mathfrak{s}_m$, das Unterideal von Ω_m ist, mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}_m = \Psi_m(\mathfrak{A}_m) \subseteq \mathfrak{L}_m.$$

Wegen der Halbeinfachheit von $\mathfrak{s}_m$ gibt es dann aber ein Element ψ_m in Ω_m, das Ψ_m erzeugt, es ist also

$$\Psi_m = \{\psi_m\}.$$

Der Operator ψ_m kann noch idempotent gewählt werden. $\psi_m(\xi)$ liegt dann in A_m und ist die Regel, aus der alle anderen folgen. Damit ist der Satz bewiesen.

Dieses Ergebnis ist in einem allgemeineren Zusammenhang auch von Specht bewiesen worden ([5], Satz 10).

Da der Operator ψ_m in Ω_m liegt, kann er nach Satz 1 auch in die Gestalt $\omega_m \vartheta$ gebracht werden, worin ϑ einen Operator aus $\mathfrak{t}_{m-1}$ bedeutet. Dem Corollar zu Satz 1 entspricht dann

Satz 5: *Die Regeln* $\psi_m(\xi) = 0$ *in* L_m *können als Summen von linksnormierten Produkten* $[\xi_1 \xi_{i_2} \xi_{i_3} \ldots \xi_{i_m}]$ *geschrieben werden, in denen jedesmal* ξ_1 *an erster Stelle steht.*

Die Eigenschaft (b) hat zur Folge, daß die Regeln $\psi_m(\xi) = 0$ für die verschiedenen m nicht voneinander unabhängig sind. Aus jeder Regel $\psi_m(\xi) = 0$ folgen Regeln $\psi'_{m+l}(\xi) = 0$, $l = 1, 2, \ldots$ deren Operatoren ψ'_{m+l} jeweils in Ψ_{m+l} liegen. Es kann dabei der Fall eintreten, daß von einem gewissen m ab alle Ideale Ψ_{m+l} bereits durch die Operatoren ψ'_{m+l} erzeugt werden. Alle Regeln in L_{m+l} folgen dann bereits aus der einen Regel von L_m. Insbesondere ist das dann der Fall, wenn L nilpotent ist, d. h., wenn $L_m = L_{m+1} = \cdots = 0$ ist. Dann ist $\psi_m = \omega_m$ und daraus folgt $\psi_{m+l} = \omega_{m+l}$ für $l = 1, 2, \ldots$. In einem solchen Fall ist der reduzierte freie Liesche Ring L also durch die Angabe von endlich vielen Regeln bestimmt. Es ist bisher unbekannt, ob jeder reduzierte freie Liesche Ring schon durch endlich viele Regeln definiert ist.

In Satz 4 ist lediglich die Existenz einer Regel für jeden Teilmodul L_m bewiesen, aus der alle anderen Regeln in L_m folgen. Es soll kurz gezeigt werden, daß es leicht möglich ist, zu einem beliebig vorgegebenem System von Regeln $p^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ das System $\psi_{ir}(\xi) = 0$,

$m = 1, 2, \ldots$ zu konstruieren. Dazu verwendet man zweckmäßig die Differentiation nach Hausdorff [11]. Das Symbol $u \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist danach definiert durch die Gleichung

$$p(x_1, \ldots, x_i + \lambda u, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot u \frac{\partial}{\partial x_i} p(x_1, \ldots, x_n).$$

Es sei jetzt $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine Regel, die homogen vom Grade m in den Unbestimmten x_i sein soll, und zwar soll jede Unbestimmte in jedem Summanden mit dem gleichen Grad vorkommen. Es sei $n < m$. Dann ist

$$\overline{p}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} p(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

eine Regel, die mit $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ gleichbedeutend ist, d. h., aus $p(x) = 0$ folgt $\overline{p}(x) = 0$ und umgekehrt. Dieser Prozeß muß $m - n$-mal in geeigneter Reihenfolge wiederholt werden. Man erhält dann eine Regel $q(x_1, \ldots, x_m) = 0$, die mit $p = 0$ gleichbedeutend ist. Sie ist homogen vom Grade m und enthält jede Unbestimmte in jedem Summanden genau einmal. Nach geeigneter Umschreibung liegt die linke Seite $q(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ dann in Λ_m und es gibt dazu einen Operator φ in $\mathfrak{s}_m$, so daß $q(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \varphi(\xi)$ ist.

Die zu Anfang eingeführte Bedingung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ist nämlich $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine Regel, in deren linker Seite Summanden vorkommen, die eine Unbestimmte x_i mit verschiedenem Grad enthalten, so spaltet mehrfache Differentiation nach x_i die Regel $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ auf, d. h., es ist $p(x_1, \ldots, x_n) = p'(x_1, \ldots, x_n) + p''(x_1, \ldots, x_n) = 0$ und jeder der Summanden auf der linken Seite ist eine Regel für sich. Insbesondere ergibt sich daraus auch, daß Regeln, die in ihren Variablen nicht homogen sind, sofort in homogene Summanden zerlegt werden können, deren jeder eine Regel für sich bildet.

Sind schließlich auf diese Weise mehrere Operatoren φ_i gefunden, die zu Regeln $q^{(i)}(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ in L_m gehören, so ist es nur noch nötig ein ψ_m aufzusuchen mit der Eigenschaft $\psi_m \eta = 0$ für alle η, für die auch $\varphi_i \eta = 0$ ist. Diese Aufgabe, die Auffindung des „master idempotent", ist von Rutherford ([8], § 40) allgemein gelöst worden. $\psi_m(\xi) = 0$ ist dann die Regel in L_m, aus der alle anderen folgen.

§ 6. Satz 5 gestattet es, eine systematische Übersicht über alle reduzierten freien Lieschen Ringe zu gewinnen. Mit seiner Hilfe läßt sich die Frage beantworten, ob zwei verschiedene Systeme von Regeln bei gleicher Zahl der Erzeugenden isomorphe reduzierte freie Liesche Ringe definieren. Andererseits ist die Form $\psi_m(\xi) = 0$ nicht in allen Fällen die einfachste Schreibweise für eine Regel.

Die einfachste Regel, die im Modul L_m eines reduzierten freien Lieschen Ringes L gelten kann, ist $\psi_m(\xi) = \omega_m(\xi) = [\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m] = 0$. Der durch die Werte der linken Seite im freien Lieschen Ring bestimmte Modul $\mathfrak{M}_m$ fällt dann mit $\mathfrak{L}_m$ zusammen und es ist daher $L_m = 0$.

Für $1 \leqq m \leqq 3$ ist sogar jede Regel $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ in L_m, deren linke Seite nicht schon in den x_i identisch Null wird, mit $\omega_m(\xi) = 0$ gleichbedeutend. Der Modul $\mathfrak{L}_m$ im freien LIEschen Ring $\mathfrak{L}$ enthält bei $k \geqq 2$ Erzeugenden für diese m jeweils nur einen einzigen irreduziblen Darstellungsmodul, der zu den Zerlegungen [1], [1,1] bzw. [2,1] gehört. $\mathfrak{M}_m$ kann also nur Null sein oder mit $\mathfrak{L}_m$ zusammenfallen.

Die ersten Regeln, für die $\mathfrak{M}_m$ ein echter Teilmodul von $\mathfrak{L}_m$ ist, können erst für $m = 4$ auftreten. Im freien LIEschen Ring $\mathfrak{L}$ besteht $\mathfrak{L}_4$ nämlich aus zwei irreduziblen Darstellungsmoduln $\mathfrak{s}_4^{[31]}(\mathfrak{A}_4)$ und $\mathfrak{s}_4^{[211]}(\mathfrak{A}_4)$, die beide einfach auftreten. Zu ihrer Existenz sind im ersten Fall mindestens zwei, im zweiten Fall mindestens drei Erzeugende von $\mathfrak{L}$ nötig.

Abgesehen von der Regel $\omega_4(\xi) = 0$ lassen sich also höchstens zwei Regeln angeben, die homogen vom Grade vier in den Unbestimmten sind und die voneinander unabhängig sind, also daß keine aus der anderen folgt. Zwei solche Regeln sind

$$p(x_1, x_2) = [x_1\, x_2\, x_2\, x_2] = 0$$

und

$$q(x_1, \ldots, x_4) = [[x_1\, x_2]\, [x_3\, x_4]] = 0,$$

denn wie in [2], §§ 4 und 5 vorgerechnet ist, liegen alle Werte von p in $\mathfrak{s}_4^{[31]}(\mathfrak{A}_4)$ und entsprechend alle Werte von q in $\mathfrak{s}_4^{[211]}(\mathfrak{A}_4)$. Die Regel $p(x_1, x_2) = 0$ bedeutet also, daß $L_4 \simeq \mathfrak{s}_4^{[211]}(\mathfrak{A}_4)$ und entsprechend folgt aus $q(x_1, \ldots, x_4) = 0$, daß $L_4 \simeq \mathfrak{s}_4^{[31]}(\mathfrak{A}_4)$. Gelten beide Regeln gleichzeitig, dann muß $L_4 = 0$ sein. Es gibt keine Regeln mehr in L_4, die nicht mit $p = 0$, $q = 0$ oder beiden zusammen gleichbedeutend sind. Zum Beispiel ist noch die Regel

$$\overline{p}(x_1, x_2) = [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] = 0$$

gleichbedeutend mit $p = 0$.

Unter Verwendung der in [2], §§ 4 und 5 beschriebenen YOUNGschen symmetrizer und der Klammeroperatoren lassen sich die Regeln $p = 0$ und $q = 0$ umformen. $p = 0$ entspricht

$$\omega_4(\varepsilon + (234) + (432) + (23) + (34) + (42))\,(\xi) = 0$$

und statt $q = 0$ kann geschrieben werden

$$\omega_4(\varepsilon - (34))\,(\xi) = 0.$$

$p = 0$ und $q = 0$ sind damit in die nach Satz 4 und 5 mögliche Gestalt übergeführt. Das bedeutet in diesem Fall keine Vereinfachung der Schreibweise, es gestattet aber die Festlegung der irreduziblen Darstellungsmoduln, in denen die linken Seiten liegen.

Wie das Beispiel zeigt, gelangt man zu einfachen Regeln, indem linksnormierte Produkte mit mehrfach auftretenden Unbestimmten oder Produkte mit bestimmter Klammerung gleich Null gesetzt werden. Ihre

Umschreibung in die Form $\psi_m(\xi) = 0$ ist unter Benutzung der YOUNGschen symmetrizer und der Klammeroperatoren, oder was auf dasselbe herausläuft, mittels HAUSDORFF-Differentiation immer leicht möglich. Daraus läßt sich dann berechnen, welche irreduziblen Darstellungsmoduln in $\mathfrak{M}_m$ liegen.

Schluß.

Die Zuordnung eines freien LIEschen Ringes $\mathfrak{L}$ zu einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ geschieht nach MAGNUS [1] auf folgende Weise. Es seien $A_1, \ldots, A_k$ die k Erzeugenden von $\mathfrak{F}$. Dann wird durch die Beziehung

$$A_i = 1 + a_i,$$

$$A_i^{-1} = 1 - a_i + a_i^2 - - \cdots, \qquad i = 1, \ldots, k$$

die freie Gruppe $\mathfrak{F}$ in einem Teilbereich des assoziativen Ringes $\mathfrak{A}$ treu dargestellt. Zu jedem Wort $W(A_1, \ldots, A_k)$ gehört eine Entwicklung

$$W(A_1, \ldots, A_k) = 1 + D_m(a_1, \ldots, a_k) + D_{m+1}(a_1, \ldots, a_k) + \cdots,$$

in der auf der rechten Seite die Summanden von gleichem Grade h in den a_i zu homogenen Polynomen D_h zusammengefaßt sind. Das Glied D_m mit dem kleinsten Grad m heiße das *Anfangsglied* zum Worte W: der Grad m besagt, daß W noch in $\mathfrak{F}_m$, der m-ten Untergruppe der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{F}$ liegt, aber nicht mehr in $\mathfrak{F}_{m+1}$.

Es werde mit $\overline{\mathfrak{L}}$ der LIEsche Unterring von $\mathfrak{L}$ bezeichnet, der alle LIEschen Polynome mit ganzen Koeffizienten enthält. Dann liegen alle Anfangsglieder zu Worten aus $\mathfrak{F}$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ und umgekehrt ist jedes LIEsche Polynom in $\overline{\mathfrak{L}}$ auch Anfangsglied.

Die Beschränkung auf ganze Koeffizienten bedeutet eine Schwierigkeit, wenn Aussagen über die Struktur des LIEschen Ringes in gruppentheoretische Aussagen übersetzt werden sollen. Satz 5 benutzt wesentlich die Halbeinfachheit von $\mathfrak{s}_m$, aber gerade diese Halbeinfachheit geht verloren, wenn auch in $\mathfrak{s}_m$ nur noch Operatoren mit ganzen Koeffizienten zugelassen sind.

Es sei jetzt $F \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{V}$ eine reduzierte freie Gruppe, also eine Gruppe, die als Faktorgruppe der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ nach einer vollinvarianten Untergruppe $\mathfrak{V}$ geschrieben werden kann. Dann bilden alle Anfangsglieder zu Worten aus $\mathfrak{V}$ ein vollinvariantes Ideal $\overline{\mathfrak{M}}$ im LIEschen Ring $\overline{\mathfrak{L}}$ und $\bar{L} \cong \overline{\mathfrak{L}}/\overline{\mathfrak{M}}$ ist der F zugeordnete reduzierte freie LIEsche Ring.

Die Moduln $\overline{\mathfrak{M}}_m$ lassen sich entsprechend wie oben gezeigt konstruieren. $\overline{\mathfrak{M}}_m$ und $\mathfrak{M}_m$ haben den gleichen Rang, dagegen kann $\overline{\mathfrak{M}}_m$ nicht mehr ohne weiteres als Summe von Rechtsidealen dargestellt werden. Das hat zur Folge, daß Regeln, die in L gleichbedeutend sind, dies in $\bar{L}$ nicht mehr zu sein brauchen.

Zum Beispiel sind die beiden Regeln

$$p(x_1, x_2) = [x_1\, x_2\, x_2\, x_2] = 0$$

und

$$\overline{p}(x_1, x) = [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] = 0$$

in einem reduzierten freien Lieschen Ring L mit rationalen Koeffizienten gleichbedeutend. Sie sind dies jedoch nicht mehr in $\bar{L}$, d. h. bei Beschränkung auf ganze Koeffizienten. Denn

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} [x_1\, x_2\, x_2\, x_2] = [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] + [x_1\, x_2\, x_2\, x_1] = 2\,[x_1\, x_2\, x_1\, x_2]$$

heißt, daß aus $p(x_1, x_2) = 0$ die Regel $2\,\overline{p}(x_1, x_2) = 0$ folgt. Es ist bei der Rechnung benutzt, daß ein linksnormiertes Liesches Produkt identisch Null ist, wenn die beiden ersten Variablen gleich sind. Umgekehrt folgt aus $\overline{p}(x_1, x_2) = 0$ auch $p(x_1, x_2) = 0$, denn es ist

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} [x_1\, x_2\, x_1\, x_2] = [x_1\, x_2\, x_2\, x_2].$$

Das durch die linke Seite von $p = 0$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ aufgespannte vollinvariante Ideal ist also ein echtes Unterideal des zu $\overline{p} = 0$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ gehörenden Ideals.

Literaturverzeichnis.

[1] Magnus, W.
J. reine angew. Math. **182**, 142—149 (1940).

[2] Wever, F.
J. reine angew. Math. **187**, 44—54 (1949).

[3] Baer, R.
Transact. Amer. Math. Soc. **58**, 390—419 (1945).

[4] Specht, W.
Math. Zeitschr. **51**, 367—376 (1948).

[5] Specht, W.
Math. Zeitschr. **52**, 557—589 (1949).

[6] Wever, F.
Math. Ann. **120**, 563—580 (1949).

[7] Dynkin, F. B.
C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR, 2. Ser. **57**, 323—326 (1947).

[8] Rutherford, D. E.
Substitutional Analysis, Edinburgh 1948.

[9] van der Waerden, B. L.
Moderne Algebra II, 2. Aufl. Berlin 1940.

[10] van der Waerden, B. L.
Gruppen von linearen Transformationen (Ergebnisse der Math., IV 2, 1935).

[11] Hausdorff, F.
Sitz. Ber. Sächs. Akad. Wiss. (Math. Phys. Klasse) Leipzig **58**, 19—48 (1906).

(Eingegangen am 24. März 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 326–334 (1952).

Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

Von

Dieter Gaier in Stuttgart.

1. In dieser Arbeit betrachten wir ein Funktionselement

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

mit dem Konvergenzradius 1 und untersuchen die Summierbarkeit von (1.1) in $z=1$. Dabei werden die Verfahren $C_k (0<k<\infty)$, A, $E_p (0<p<\infty)$, B, $S_\alpha (0<\alpha<1)$ und $T_\alpha (0<\alpha<1)$ herangezogen[1]).

Nimmt man von $f(z)$ zunächst die Beschränktheit in $|z|<1$ an, so sind die Verfahren C_k und A äquivalent. Diese Tatsache ist bereits in einem Satz von Offord[2]) enthalten, soll aber kurz von neuem bewiesen werden. Sodann wird gezeigt, daß auch die übrigen Verfahren E_p, B, S_α und T_α untereinander äquivalent sind, falls $f(z)$ in $|z|<1$ beschränkt ist; letztere Bedingung wird sogar noch abgeschwächt werden. Der Beweis dieser Tatsache stützt sich auf den O-$T_\alpha \to K$-Satz, wobei die darin auftretende O-Bedingung sich leicht aus einer einfachen funktionentheoretischen Annahme folgern läßt.

Ist nun $f(z)$ in $|z|\leq 1$ stetig, dann braucht $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht zu konvergieren, wie Fejér gezeigt hat[3]). Durch welche der hier betrachteten Verfahren diese Reihe summierbar ist, hängt nach dem oben Gesagten davon ab, ob sie A- bzw. B-summierbar ist. Die A-Summierbarkeit ist trivial; dagegen wird sich ergeben, daß das Fejérsche Beispiel mehr leistet, indem es eine in $|z|<1$ analytische und in $|z|\leq 1$ stetige Funktion angibt, deren Entwicklung nach Potenzen von z in $z=1$ nicht B-summierbar ist. Diese Tatsache läßt sich auch zur Beurteilung der Schärfe zweier Sätze von Karamata und M. Riesz verwenden. Weiter erhalten wir durch das Fejérsche Beispiel eine Aussage über das Verhältnis zwischen

[1]) Bezüglich des neueren S_α-Verfahrens vgl. W. Meyer-König [10], S. 272ff. Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Vgl. A. C. Offord [13], S. 474. Der Offordsche Satz lautet: Ist $f(z)$ im Sektor $|\arg z|<\delta$, $0<|z|<1$ $(\delta>0)$ beschränkt, und $a_n=o(n^k)$ $(k>0)$, so folgt $C_k\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ aus $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

[3]) Vgl. L. Fejér [1], S. 15.

den beiden Gruppen äquivalenter Verfahren, die im Falle der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z|<1$ entstehen; in abgekürzter Schreibweise gilt $\{E_p,\ B,\ S_\alpha,\ T_\alpha\} \to \{C_k,\ A\}$, jedoch ist die Umkehrung im allgemeinen falsch.

In losem Zusammenhang mit den hier durchgeführten Überlegungen steht die Frage, ob die TAUBER-Bedingung $a_n \sqrt{n} \to 0$ für das BORELsche Verfahren „ausgemittelt" werden kann, so wie es bei der entsprechenden TAUBER-Bedingung $a_n n \to 0$ für das ABELsche Verfahren der Fall ist. Weder die so entstehende Bedingung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sqrt{\nu} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

noch die schärfere Bedingung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \sqrt{\nu} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

wird sich als TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren erweisen.

2. Wir beginnen unsere Untersuchungen über die Summierbarkeit beschränkter Potenzreihen mit einem Beweis der folgenden, bereits bekannten Tatsache.

Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *in* $|z|<1$ *beschränkt, so sind die Verfahren* C_k *und* A *in der Anwendung auf* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *äquivalent.*

Beweis. Wegen des $C_k \to A$-Satzes braucht nur noch die Umkehrung bewiesen werden. Nach LANDAU[4]) folgt aus der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z|<1$ die Beschränktheit der $C_{k|2}$-Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und zusammen mit der A-Summierbarkeit folgt daraus die C_k-Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$[5]).

Der obige Satz enthält die von HARDY-LITTLEWOOD[6]) erwähnte Tatsache, daß eine in $|z|<1$ beschränkte Potenzreihe am Rande von keiner oder von jeder positiven Ordnung C_k-summierbar ist.

Wir beschäftigen uns nun mit der Äquivalenz der Verfahren E_p, B, S_α, T_α. Zunächst sei ein Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz. *Die Funktion* $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *sei im Innern eines Kreises* $\mathfrak{K}$: $|z+a|=1+a$ $(a>0)$ *regulär und beschränkt. Dann gilt*

$$b_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{2.1}$$

[4]) Vgl. E. LANDAU [8], S. 256—257.
[5]) Vgl. E. KOGBETLIANTZ [7], S. 37.
[6]) Vgl. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD [4], S. 70.

Beweis. Da sich die Kreislinie $\mathfrak{K}$ in der Umgebung von $z=1$ verhält wie $z(\varphi)=(1+c_1\varphi^2)\,e^{i\varphi}$ für ein $c_1>0$, liegt die aus den beiden Teilen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bestehende Kurve $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$ mit

$$\mathfrak{C}_1\colon\quad z(\varphi)=(1+c_2\varphi^2)\,e^{i\varphi}\qquad c_2=\frac{c_1}{2}\,,\qquad |\varphi|\leqq\varphi_0$$

$$\mathfrak{C}_2\colon\quad z(\varphi)=(1+c_2\varphi_0^2)\,e^{i\varphi}\qquad |\varphi|>\varphi_0$$

für geeignete Wahl von $\varphi_0>0$ innerhalb von $\mathfrak{K}$, mit Ausnahme des Punktes $z=1$, in dem $\mathfrak{C}$ den Kreis $\mathfrak{K}$ von innen berührt. Ist nun $|g(z)|\leqq M$ in $\mathfrak{K}$, so folgt daraus

$$|2\pi b_n|=\left|\int_{\mathfrak{C}}\frac{g(z)}{z^{n+1}}\,dz\right|\leqq M\left(\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}+\int_{\mathfrak{C}_2}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}\right),$$

wovon der letzte Teil ersichtlich $O\left((1+c_2\varphi_0^2)^{-n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Weiter gilt

$$\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}\leqq 2\left(\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{(1+c_2\varphi^2)^n}+\int_0^{\varphi_0}\frac{d\,(1+c_2\varphi^2)}{(1+c_2\varphi^2)^{n+1}}\right)$$

$$<2\left(\int_0^{\infty}\frac{d\varphi}{(1+c_2\varphi^2)^n}+\int_0^{\infty}\frac{d\,(1+c_2\varphi^2)}{(1+c_2\varphi^2)^{n+1}}\right).$$

Das erste Integral hat den Wert

$$\frac{1}{\sqrt{c_2}}\,\frac{2\pi}{4^n}\,\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\,,$$

wie man etwa durch Anwendung des Residuensatzes feststellt. Nach der Stirlingschen Formel ist dieser Beitrag $\sim 1/\sqrt{n}$, und da das zweite Integral $1/n$ ist, folgt daher auch

$$\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{|dz|}{|z|^{n+1}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir wenden nun den Hilfssatz an und beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ *in* $|z|<1$ *beschränkt, so sind die Verfahren* E_p, B, S_α *und* T_α *in der Anwendung auf* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *alle äquivalent.*

Beweis. Für den Beweis wird es genügen, statt der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z|<1$ vorauszusetzen, daß $a_n\to 0$ strebt mit $n\to\infty$, und daß weiter $f(z)$ beschränkt ist in jedem Kreis, der den Einheitskreis in $z=1$ von innen berührt, daß also

(2.2) $\quad |f(z)|<M\quad$ für $\quad |z-b|<1-b\quad$ (alle b mit $0<b<1$)

gilt; dabei kann M noch von b abhängen.

Wegen $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ sind nämlich zunächst alle Verfahren E_p, B, S_α äquivalent zu gewissen Verfahren T_α[7]), und es wird sich also noch darum handeln, unter der Voraussetzung (2.2) die Äquivalenz der T_α-Verfahren nachzuweisen. Seien α_1 und α_2 zwei Zahlen mit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Infolge des $T_{\alpha_1} \to T_{\alpha_2}$-Satzes ist zu zeigen, daß aus der T_{α_2}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ deren T_{α_1}-Summierbarkeit folgt. Nun ist aber

$$T_{\alpha_2} = T_\beta T_{\alpha_1} \qquad \left(0 < \beta = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} < 1\right),$$

d.h. die Entwicklung von $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha_1$ ist, für $z = 1$ genommen, T_β-summierbar. Ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 - \alpha_1)^n w^n = g(w) \qquad \left(w = \frac{z - \alpha_1}{1 - \alpha_1}\right)$$

die genannte Entwicklung, die also T_β-summierbar ist für $w = 1$, so gibt es wegen (2.2) sicher einen Kreis $\mathfrak{K}$ in der w-Ebene von der im Hilfssatz beschriebenen Art. Daher ist

$$c_n (1 - \alpha_1)^n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \to \infty),$$

und die Anwendung des O-$T_\beta \to K$-Satzes[8]) zeigt, daß nicht nur T_β-$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 - \alpha_1)^n = s$ ist, sondern sogar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 - \alpha_1)^n = s$, also T_{α_1}-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, womit Satz 1 bewiesen ist.

3. Bei der Behandlung von Potenzreihen, die in $|z| \leqq 1$ stetig sind, kommen wir zunächst zur Untersuchung des eingangs erwähnten Fejér-schen Beispiels.

Satz 2. *Es gibt eine in $|z| < 1$ reguläre, in $|z| \leqq 1$ stetige Funktion $f(z)$, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $z = 1$ nicht B-summierbar ist.*

Beweis. Wir setzen im Anschluß an Fejér

$$f_n(z) = \left\{\frac{1}{n} + \frac{z}{n-1} + \frac{z^2}{n-2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1} - \frac{z^{n+1}}{1} - \frac{z^{n+2}}{2} - \cdots - \frac{z^{2n}}{n}\right\}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

und bemerken zunächst, daß für $z = e^{i\varphi}$

$$|f_n(z)| = \left|\left(\frac{z^{-n}}{n} - \frac{z^n}{n}\right) + \left(\frac{z^{-n+1}}{n-1} - \frac{z^{n-1}}{n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{z^{-1}}{1} - \frac{z}{1}\right)\right| \cdot |z^n|$$
$$= 2\left|\frac{\sin n\varphi}{n} + \frac{\sin (n-1)\varphi}{n-1} + \cdots + \frac{\sin \varphi}{1}\right| \leqq C_1$$

[7]) Vgl. W. Meyer-König [10], S. 289—290 und die Bemerkung S. 303.
[8]) Vgl. G. H. Hardy and J. E. Littlewood [3], S. 52.

gilt, wo C_1 eine positive, von n und φ unabhängige Konstante ist. Wir haben daher für dieses C_1

$$|f_n(z)| \leqq C_1 \qquad (|z| \leqq 1). \tag{3.1}$$

Nun sei $s_m^{(n)}$ die (nicht negative) m-te Teilsumme von $f_n(1)$. Wir wollen zeigen, daß

$$B(n; s_\nu^{(n)}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n)\, s_\nu^{(n)} > C_2 \log n \qquad (n > n_0) \tag{3.2}$$

ist für ein positives, von n unabhängiges C_2. Denn zunächst ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n)\, s_\nu^{(n)} \geqq \sum_{h=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} u_{n+h}(n)\, s_{n+h}^{(n)}. \tag{3.3}$$

Weiter haben wir einerseits

$$s_{n+h}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-h-1} \frac{1}{n-\nu} > \log n - \log(h+1);$$

andererseits sind aber die Elemente $u_\nu(x)$ der B-Matrix für $x > x_0$ größer als $C_3 \frac{1}{\lfloor x}$ für ein positives, von x unabhängiges C_3, wenn man ν auf das Intervall $|\nu - x| \leqq \lfloor x$ beschränkt [9]). Mit Hilfe dieser Tatsachen ergibt sich aus (3.3)

$$\begin{aligned} B(n; s_\nu^{(n)}) &> \frac{C_3}{\lfloor\sqrt{n}} \sum_{h=1}^{\lfloor\sqrt{n}} \{\log n - \log(h+1)\} \\ &> C_3 \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}} \log n - C_3 \frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1\right)! > C_2 \log n \end{aligned}$$

für ein geeignetes positives, von n unabhängiges C_2; denn nach der Stirlingschen Formel gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(\lfloor\sqrt{n} + 1\right)! \cong \log \sqrt{n} \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist also (3.2) als richtig erkannt.

Wir setzen nun wieder mit Fejér

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_{2r^3}(z)}{r^2}.$$

Wegen (3.1) konvergiert diese Polynomreihe gleichmäßig in $|z| \leqq 1$, $f(z)$ ist also regulär in $|z| < 1$ und stetig in $|z| \leqq 1$. Für die Teilsummen s_m der Entwicklung von $f(z)$ nach Potenzen von z gilt nach dem Weier-

[9]) Man verwende etwa die in G. H. Hardy [2], S. 200 gegebene Abschätzung dieser $u_\nu(x)$.

STRASSschen Doppelreihensatz

$$s_m = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s_m^{(2^{r^3})}}{r^2} > \frac{s_m^{(2^{n^3})}}{n^2}$$

für alle n, und hieraus ergibt sich für $2^{n^3} > n_0$

$$\begin{aligned} B(2^{n^3}; s_r) &= \sum_{r=0}^{\infty} u_r(2^{n^3})\, s_r \\ &> \sum_{r=0}^{\infty} u_r(2^{n^3})\, \frac{s_r^{(2^{n^3})}}{n^2} \\ &> \frac{1}{n^2} B(2^{n^3}; s_r^{(2^{n^3})}) > C_2 \frac{1}{n^2} \log 2^{n^3}, \end{aligned}$$

was nicht beschränkt bleibt für $n \to \infty$. Daher ist die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ in $z=1$ nicht B-summierbar.

Die Aussage von Satz 2 läßt sich noch beträchtlich verschärfen.

Zusatz. *Zu jedem $b > 1$ gibt es eine in $|z-b| > b-1$ reguläre und in $z-b \geq b-1$ stetige Funktion $F(z)$ $(= F_b(z))$, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ in $z=1$ nicht B-summierbar ist.*

Beweis. Wir wählen $p > 1$ so, daß

$$b = \frac{2^p - 1}{2^p - 2}$$

ist, und bemerken zunächst, daß die in Satz 2 genannte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht E_{p-1}-summierbar ist; d. h. die E_p-Transformation der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist nicht E_1-summierbar. Unter Benützung der funktionentheoretischen Deutung des E_p-Verfahrens[10]) heißt das: Entwickelt man

$$f\left(\frac{z}{2^p - (2^p - 1)z}\right) = F(z)$$

nach Potenzen von z, so ist die dann entstehende Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ in $z=1$ nicht E_1-summierbar. Da aber $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und in $|z| \leq 1$ stetig war, ist $F(z)$ dort regulär bzw. stetig, wo

$$\left| \frac{z}{2^p - (2^p - 1)z} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{z}{2^p - (2^p - 1)z} \right| \leq 1$$

ist, also für $|z-b| > b-1$ bzw. $|z-b| \geq b-1$. Satz 1 liefert vollends die Aussage des Zusatzes; die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ist danach durch keines der Verfahren E_p, B, S_α, T_α summierbar, da sie nicht E_1-summierbar ist.

[10]) Vgl. K. KNOPP [6], S. 325.

4. Der Satz 2 bzw. sein Zusatz lassen sich zum Beweis der Tatsache verwenden, daß zwei Sätze von J. Karamata und M. Riesz in gewisser Hinsicht nicht verschärft werden können.

a. J. Karamata hatte bewiesen[11]: Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $|z|<1$ regulär und in $|z-\frac{1}{2}|\leqq\frac{1}{2}$ stetig, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für jedes $\varepsilon>0$ BC_ε-summierbar.

Satz 2 zeigt, daß hierin das positive ε nicht durch $\varepsilon=0$ ersetzt werden kann. Entsprechendes gilt bezüglich der Analoga zum Karamatasschen Satz für die E_p- und S_α-Verfahren[12]).

b. Von M. Riesz stammt der Satz[13]): Ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$: $|z|<R$, $\vartheta<\arg(z-1)<2\pi-\vartheta$ $(R>1,\ 0<\vartheta<\pi/2)$ regulär und in dessen abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Der Rand des Gebiets $\mathfrak{G}$ trifft, wie man leicht sieht, den Einheitskreis $|z|=1$ in $z=1$ unter einem positiven Winkel. Es entsteht die Frage, ob der Satz von Riesz richtig bleibt, wenn der Rand von $\mathfrak{G}$ den Einheitskreis $|z|=1$ in $z=1$ von außen berührt. Der Zusatz zu Satz 2 besagt nun, daß $\mathfrak{G}$ nicht durch ein Kreisgebiet $|z+c|<1+c$ $(c>0)$ ersetzt werden kann. Nach diesem Zusatz gibt es doch Funktionen $f(z)$, die in diesem Kreisgebiet regulär und in dessen abgeschlossener Hülle stetig sind, ohne daß ihre Entwicklung nach Potenzen von z in $z=1$ B-summierbar wäre.

c. Wir kommen nochmals auf die Untersuchungen bei beschränkten Potenzreihen zurück. In 2 hatten wir gesehen, daß dann die hier betrachteten Verfahren in zwei Gruppen äquivalenter Verfahren zerfallen. Über das Verhältnis zwischen den beiden Gruppen können wir nunmehr sagen: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ durch eines der Verfahren E_p, B, S_α, T_α summierbar zum Wert s, so ist diese Reihe auch C_k- und A-summierbar zum selben Wert, denn die Annahme hat ja zur Folge, daß $\lim_{z\to 1-0} f(z)=s$ ist. Andererseits zieht die C_k- und A-Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ noch nicht die Summierbarkeit durch eines der übrigen Verfahren nach sich, wie unser Beispiel von Satz 2 beweist. Es zeigt sich hier wieder, daß beim Vergleich der Verfahren B und C_k das erstere stärker, das letztere aber feiner ist.

5. Lose mit den Untersuchungen dieser Arbeit zusammenhängend ist die Frage, ob die Tauber-Bedingung $|a_n|\,|\,n\to 0$ für das B-Verfahren ausgemittelt werden kann.

---

[11]) Vgl. J. Karamata [5], S. 157.
[12]) Vgl. W. Meyer-König [11], S. 352.
[13]) Vgl. etwa E. Landau [9], S. 64.

Satz 3. *Die Bedingung*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{5.1}$$

ist keine TAUBER-*Bedingung für das B-Verfahren.*

Beweis. Wäre (5.1) eine TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren, so wäre auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2<\infty \tag{5.2}$$

eine solche. Denn wählt man zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein n_0 so, daß

$$\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty}|a_\nu|^2<\varepsilon^2$$

ist, so gilt für $n>n_0$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n_0}|a_\nu|\sqrt{\nu}+\frac{1}{n}\sum_{\nu=n_0+1}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}=A_1^{(n)}+A_2^{(n)},$$

$$A_1^{(n)}<\varepsilon \quad \text{für} \quad n>n_1>n_0$$

$$A_2^{(n)}\leq\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\nu=n_0+1}^{n}\nu\cdot\sum_{\nu=n_0+1}^{n}|a_\nu|^2}<\varepsilon \quad \text{für} \quad n>n_0,$$

insgesamt also

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\sqrt{\nu}<2\varepsilon \qquad (n>n_1).$$

Nun ist aber (5.2) keine TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren. Denn nach MOORE[14]) gibt es eine Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x, die im Intervall $<-\pi,+\pi>$ stetig ist, und deren FOURIER-Reihe

$$f(x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x)$$

für $x=0$ wohl B-summierbar, jedoch nicht konvergent ist, obwohl $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(0)^2<\infty$ vermöge der BESSELschen Ungleichung erfüllt wäre. Also ist (5.2) und damit (5.1) keine TAUBER-Bedingung für das B-Verfahren.

Literaturverzeichnis.

[1] FEJÉR, L.
Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Sitz. Ber. der Bay. Akad. der Wiss. **40**, 3. Abh. (1910), 17 S.

[2] HARDY, G. H.
Divergent Series, Oxford 1949.

[14]) Vgl. C. N. MOORE [12], S. 286.

[3] Hardy, G. H., and J. E. Littlewood.
Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method, Rendiconti Circolo mat. Palermo **41**, 36—53 (1916).

[4] Hardy, G. H., and J. E. Littlewood.
Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series, Math. Zeitschr. **19**, 67—96 (1924).

[5] Karamata, J.
Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande, Math. Zeitschr. **44**, 156—160 (1939).

[6] Knopp, K.
Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation, Acta math. **47**, 313—335 (1926).

[7] Kogbetliantz, E.
Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, Paris 1931.

[8] Landau, E.
Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (3. Abh.), Archiv der Math. und Physik, 3. Reihe, **24**, 250—260 (1916).

[9] Landau, E.
Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Auflage, Berlin 1929.

[10] Meyer-König, W.
Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52**, 257—304 (1949).

[11] Meyer-König, W.
Die E_p- und S_a-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Math. Zeitschr. **52**, 344—354 (1949).

[12] Moore, C. N.
On the application of Borel's method to the summation of Fourier series, Proc. Nat. Acad. Sc. **11**, 284—287 (1925).

[13] Offord, A. C.
On the summability of power series, Proc. London math. Soc., Ser. 2, **33**, 467—480 (1932).

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Einführung in die Atomphysik

Von Professor Dr. **Wolfgang Finkelnburg.** Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 230 Abbildungen. XII, 416 Seiten. 1951.
DM 34.50; Ganzleinen DM 39.—

Aus den Besprechungen der ersten Auflage: ... Die ganze Anlage und Durchführung lassen erkennen, daß dieses Buch aus Liebe zur Sache und aus einer wahren Begeisterung für die innere Schönheit und Geschlossenheit der Atomphysik geschrieben ist. Man kann immer wieder die Absicht des Verfassers feststellen, weniger die ausführliche Kenntnis spezieller Probleme zu vermitteln, als eine Übersicht über die grundlegenden Erfahrungstatsachen und die sie deutenden theoretischen Vorstellungen auf dem Gebiet der Atom-, Molekül- und Kernphysik zu geben. Daher finden sich erfreulicherweise im Buch weder zu sehr ins einzelne gehende Beschreibungen von Versuchsanordnungen, noch ausführliche theoretische Begründungen ... Je weiter man sich in das Buch vertieft, um so mehr muß man die Zuverlässigkeit und Verständlichkeit der Darstellung bewundern. *F. Sauter in „Die Naturwissenschaften"*

Inhaltsübersicht: Einleitung. Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen. Atomspektren und Atombau. Die quantenmechanische Atomtheorie. Die Physik der Atomkerne. Physik der Moleküle. Der flüssige und feste Zustand der Materie vom Standpunkt der Atomphysik. Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen. Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Grundlagen der Atomphysik

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik. Von Dr. phil. **Hans Adolf Bauer,** Professor an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien. Vierte, umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage. Mit 244 Textabbildungen. XX, 631 Seiten. DM 45.—

Wissenschaftliche Strenge und Beschränkung auf das Wesentliche, verbunden mit einer so ausführlichen Darstellungsweise, daß auch der mit dem mathematischen Rüstzeug der modernen Physik weniger vertraute Leser instand gesetzt wird, in die schwierige Materie einzudringen: das sind die Vorzüge, die dem Werk bisher seinen hervorragenden Platz in der Fachliteratur verschafft haben. Die nunmehr erschienene vierte Auflage spiegelt in ihrem stattlichen Mehrumfang die gewaltige Entwicklung der Atomphysik in den letzten Jahren wider.

Inhaltsübersicht: Die Teilchenstruktur der Materie. — Die Wellenstruktur der Materie. Die Vereinigung des Teilchen- und Wellenbildes in der Wellen-(Quanten-)Mechanik. — Schrödingers Störungstheorie. — Relativistische Verallgemeinerung der Wellenmechanik (Diracsche Theorie). — Schrifttum für ergänzendes und gründlicheres Studium. — Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von **R. Grammel · E. Hopf · H. Hopf · F. Rellich · F. K. Schmidt B. L. van der Waerden**

Soeben erschien:

Band LIII **Rechenmethoden der Quantentheorie**

dargestellt in Aufgaben und Lösungen

I. Teil: **Elementare Quantenmechanik**

Von Dr. **Siegfried Flügge,** o. Professor an der Universität Marburg, unter Mitarbeit von Dr. **Hans Marschall,** Privatdozent an der Universität Marburg. Zweite, völlig neubearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 30 Abbildungen. VIII, 272 Seiten. 1952. DM 29.80; Ganzleinen DM 32.80

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Einkörperprobleme.** A. Kräftefreier Fall. — B. Konservative Kräfte. — Eindimensionale Probleme. — Zylindersymmetrische Probleme. — Kugelsymmetrische Probleme Näherungsverfahren. — C. Nichtkonservative Kräfte. — Stationäre Probleme. — Intensitätsfragen. — Nichtstationäre Probleme. — **II. Zwei- und Mehrkörperprobleme.** Spin- und Symmetriefragen. — Eigenwertprobleme. — Stoß zweier Teilchen. — Vielkörperprobleme. — **Sachverzeichnis.**

II. Teil: **Quantentheorie der Elektrodynamik.** In Vorbereitung

Ergebnisse der angewandten Mathematik.

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik", herausgegeben von Professor Dr. **F. Lösch,** Stuttgart.

Erstes Heft: **Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen**

Von Dr. habil. **H. Bückner,** Berlin. Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten. 1952. DM 18.60

Inhaltsverzeichnis: **I. Formeln und Sätze aus der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen:** Fredholmsche Integralgleichungen, Systeme und gemischte Gleichungen, Integraloperatoren. Der reziproke Kern und die Fredholmschen Formeln. Orthogonale und biorthogonale Systeme von Funktionen: die Nullstellen der Fredholmschen Determinante. Spezielle Integraloperatoren. Zusammengesetzte Operatoren. — **II. Die Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe von Formeln und Variationsprinzipien. Einschließungssätze:** Berechnung der Eigenwerte aus der Fredholmschen Determinante. Die Potenzsummen der reziproken Eigenwerte. Extremaleigenschaften der Eigenwerte eines Hermiteschen Kerns. 1. Einschließungssatz. Extremaleigenschaften rational transformierter Eigenwerte Hermitescher Integraloperatoren und allgemeine Einschließungssätze. Dreigliedrige Einschließungspolynome. Verträgliche Spektra. **III. Iterationsverfahren:** Asymptotisches Gesetz der klassischen Iteration. Der Begriff der Beteiligung. Anwendung des klassischen Iterationsverfahrens auf die inhomogene Integralgleichung. Die Berechnung des 1. Eigenwertes eines beliebigen Kerns für den Fall $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. — Berechnung des 1. Eigenwertes beim Hermiteschen Kern. Die Berechnung der höheren Eigenwerte aus Iterationsfolgen, an deren Ausgangsfunktion λ_1 beteiligt ist. Die Abspaltung von Eigenwerten. Beispiele zum Abspaltungssatz für Integraloperatoren. Gemischte Iteration für die inhomogene Integralgleichung. Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen nach der gemischten Iteration. Ein stets anwendbares Iterationsverfahren. Gebrochen lineare Iteration. Quadratisch konvergente Iteration. — **IV. Ersatz des Kernes und der Störfunktion:** Die Abschätzungen von Tricomi. Abschätzungen für die Änderungen, die die Eigenwerte Hermitescher Kerne erfahren. Abschätzung der Änderung von Eigenfunktionen. Konvergenzsätze. Analytische Störungsrechnung für Hermitesche Kerne. Existenzsätze. Anwendung der Störungsrechnung. Der ungestörte Eigenwert ist einfach. Abschätzungen für die Störung beim einfachen Eigenwert. Störung eines mehrfachen Eigenwerts. Störungstheorie der inhomogenen Integralgleichung. Ersatz durch entartete Kerne. Das Variationsproblem von E. Schmidt für den entarteten Ersatzkern. Die Eigenfunktionen werden durch Linearkombinationen gegebener Funktionen approximiert. Die Lösung der inhomogenen Integralgleichung wird durch eine Linearkombination gegebener Funktionen approximiert. $K^*(s,t) = K(s,t)$ für ein Punktgitter. Die Analogiemethoden. Konvergenzbetrachtungen zu den Analogiemethoden. Formale Analogie zur Störungsrechnung. Anwendung der Konvergenzaussagen. — **V. Spezielle Kerne:** Kerne $K(s,t)$ mit verschiedenen Bildungsgesetzen in den Bereichen $s \leq t$ und $s > t$. Die Volterrasche Integralgleichung vom Faltungstyp. Kerne, die sich physikalisch-technisch realisieren lassen. — Literaturverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg.
Printed in Germany.